Matrices

Una matriz es un conjunto de número colocados en líneas horizontales y vericales.

Las líneas horizontales se llaman **filas** (m)
Las líneas veritacales se llaman **columnas** (n)
→ Matriz de dimensión **m x n**

Al referirnos a los elementos de una matriz nombramos primero la fila que ocupan y después la columna: a_{ij} : elemento de la fila **i** y la columna **j**.

Una matriz con una única fila o una única columna es un vector.

Si el número de filas y de columnas coinciden decimos que tenemos una **matriz cuadrada** → matriz de **orden n**.

En matrices cuadradas llamamos **diagonal principal** a los elementos a_{ii} (los dos índices son iguales). La otra diagonal es secundaria.

Una matriz en la que los elementos por debajo de la diagonal principal son **0**, es una matriz triangular superior.

Una matriz en la que los elementos por encima de la diagonal principal son **0**, es una matriz triangular inferior.

Una matriz en la que los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son **0**, es una matriz diagonal.

$A=B$ si tienen las mismas dimensiones $m \times n$ y $a_{ij}=b_{ij} \forall i,j$

Operaciones con matrices:

Suma:

Dadas dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ con las mismas dimensiones m x n, su suma es una nueva matriz $C=(c_{ij})$ de dimensión m x n en la que cada elemento es $\mathbf{c_{ij}=a_{ij}+bij}$

Propiedades:

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (asociativa)

(2) $A+B=B+A$ (conmutativa)

(3) $A+O=A \Rightarrow o_{ij}=0 \forall i,j$ (elemento neutro)

(4) $A+B=O \Rightarrow b_{ij}=-a_{ij}$ (elemento opuesto)

Producto de un número por una matriz:

Sean $A=(a_{ij})\in M_{m\,x\,n}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha A=(\alpha\, a_{ij})}$

Propiedades:

(1) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (distributiva respecto de la suma de matrices)

(2) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (distributiva respecto de la suma de números reales)

(3) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$ (asociativa respecto del preoducto de números reales)

(4) $\alpha A=A \quad \Rightarrow \quad \alpha=1$ (elemento unidad)

Producto de matrices:

Sean $A=(a_{ij})\in M_{m\,x\,p}$ y $B=(b_{ij})\in M_{p\,x\,n}$, la matriz producto $C=A{\cdot}B\in M_{m\,x\,n}$ es tal que

$$\mathbf{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}}$$

El número de columnas de la matriz A tiene que ser igual al número de filas de la matriz B.

En la matriz resultado, C, el número de filas es igual al número de filas de A y el número de columnas es igual al número de columnas de B.

Propiedades:

(1) $A\cdot B\neq B\cdot A$ (**no** conmutativa)

(2) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ $\left\{\begin{array}{l} A=(a_{ij})_{m\,x\,n} \\ B=(b_{jk})_{n\,x\,p} \\ C=(c_{kl})_{p\,x\,q} \end{array}\right\} \rightarrow D=(d_{il})_{m\,x\,q}$ (asociativa)

(3) $A{\cdot}(B+C)=A{\cdot}B+A{\cdot}C$ $\left\{\begin{array}{l} A=(a_{ij})_{m\,x\,n} \\ B=(b_{jk})_{n\,x\,p} \\ C=(c_{jk})_{n\,x\,p} \end{array}\right.$ (distributiva)

(4) Sólo existe **elemento unidad** si la matriz es **cuadrada**: $I=(i_{ij})=\begin{cases} 1, \text{si} & i=j \\ 0, \text{si} & i\neq j \end{cases}$

Matriz traspuesta:

Sea $A=(a_{ij})\in M_{m\,x\,n}$, su matriz traspuesta es $A^t\in M_{n\,x\,m}$ tal que $a^t_{ij}=a_{ji}$ (se intercambian filas por columnas)

Una matriz es **simétrica** si $A^t=A$.

Propiedades:

(1) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

(2) $(A^t)^t=A$

(3) $(A\cdot B)^t=A^t\cdot B^t$

Determinantes

El determinante de una **matriz cuadrada** es un número que depende de los elementos que la forman.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A)=|A|=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

Propiedades:

(1) $|A|=|A^t|$

(2) Si todos los elementos de una fila (o columna) son nulos, el determinante de dicha matriz es cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

(3) Si se intercambian dos filas (o columnas) en una matriz, el determinante es el opuesto del determiante de la matriz inicial.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -|A|$$

(4) El determinante de una matriz con dos filas (o columnas) iguales es nulo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(5) Si multiplicamos una fila (o columna) por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda |A|$$

(6) El determinante de una matriz con dos filas (o columnas) proporcionales es nulo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(7)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(8) Si a una fila (o columna) le sumamos una fila (o columna) multiplicada por un número, el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\lambda a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+\lambda a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(9) Si una fila (o columna) es combinación lineal de otras filas (o columnas), el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{11}+\mu a_{21} & \lambda a_{12}+\mu a_{22} & \lambda a_{13}+\mu a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \mu a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

Menor complementario y adjunto de un elemento

Si en una matriz cuadrada de orden **n** eliminamos la fila **p** y la columna **q**, obtenemos una matriz de orden **n-1** cuyo determinanate se llama **menor complementario del elemento** $\mathbf{a_{pq}}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$: menor complementario del elemento a_{32}

Adjunto del elemento $\mathbf{a_{pq}}$ **:** $\mathbf{A_{pq} = (-1)^{p+q} \alpha_{pq}}$

Propiedades:

(10) El determinante de una matriz es igual a la suma de los producto de los elementos de una fila (o columna) por sus adjuntos respectivos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$$

(11) Los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra es cero.

$$a_{12} \cdot A_{13} + a_{22} \cdot A_{23} + a_{23} \cdot A_{33} = 0$$

(12) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Rango de una matriz

Una matriz tiene rango **h** si existe un menor no nulo de orden h y todos los menores de orden h+1 son nulos.

El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo que se puede obtener de dicha matriz.

El rango de una matriz A es igual al rango de la matriz obtenida añadiendo una fila (o columna) que sea combinación lineal de las filas (o columnas) de A.

Propiedades:

(1) Si intercambiamos entre sí dos filas (o columnas) de una matriz, la nueva matriz tiene el mismo rango que la matriz inicial.

(2) Si una matriz tiene una fila (o columna) en la que todos sus elementos son nulos, el rango de dicha matriz es el mismo que el de la matriz obtenida al suprimir esa fila(o columna).

(3) Si en una matriz se suprime una fila (o columna) que es combinación lineal de las demás, el rango de la nueva matriz obtenida es el mismo que el de la inicial.

Matriz inversa:

Una matriz **cuadrada** A tiene inversa si existe una matriz A^{-1} del mismo orden que A tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Si $\exists A^{-1} \Rightarrow$ A es **regular**.

Si $\nexists A^{-1} \Rightarrow$ A es **singular**.

$$\boxed{\text{A tiene inversa} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq 0}$$

Propiedades:

(1) $\exists (A \cdot B)^{-1} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$ y $\exists B^{-1} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$\left[(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \right]$$

(2) Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

(3) $(A^{-1})^{-1} = A$

(4) Si existe, la matriz inversa es **única**.

Podemos obtener la matriz inversa aplicando el método de Gauss:

$[A|I]$ mediante operaciones filas buscamos obtener $[I|A^{-1}]$

Las operaciones filas que podemos hacer son:

- se intercambian filas

- a una fila se le suma un múltiplo de otra
- una fila se multiplica por un número $\neq 0$

De esta forma, mediante operaciones filas, buscaremos primero obtener una matriz triangular superior y después una matriz diagonal.

También podemos obtener la matriz inversa mediante la matriz adjunta: $\mathbf{A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t}$

Pasos para hallar A^{-1} :

1. Calcular el determinante de A: $\begin{cases} |A|=0 & \Rightarrow \quad \nexists A^{-1} \\ |A|\neq 0 & \Rightarrow \quad \text{ir a paso 2} \end{cases}$
2. Calcular la matriz adjunta de A: Adj(A)
3. Calcular la traspuesta de Adj(A)
4. Calcular $\frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$

Resolución de ecuaciones matriciales:

1) $\mathbf{AX=B}$

   $A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X=A^{-1}\cdot B}$

2) $\mathbf{XA=B}$

   $XA\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X=B\cdot A^{-1}}$

3) $\mathbf{AX+C=B}$

   $AX=B-C$

   $A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot(B-C) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X=A^{-1}\cdot(B-C)}$

4) $\mathbf{XA+C=B}$

   $XA=B-C$

   $XA\cdot A^{-1}=(B-C)\cdot A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X=(B-C)\cdot A^{-1}}$