

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1,25 punto) Calcule $(A - I_2) \cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.

b) (1,25 punto) Obtenga la matriz B^t y calcule, si es posible, $B^t \cdot A$

c) (1,5 punto) Calcule la matriz X que verifica $A \cdot X + B = C$.

$$a) (A - I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_2) \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$C - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad A \cdot X = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ a+2d & b+2e & c+2f \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X + B = \begin{pmatrix} -a & -b-1 & -c+2 \\ a+2d+1 & b+2e-2 & c+2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -1 \\ -b-1 = 2 \\ -c+2 = -1 \\ a+2d+1 = 0 \\ b+2e-2 = 1 \\ c+2f = -1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 \\ d = -1 \\ e = 3 \\ f = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Calcula los valores de a para que la matriz A sea regular.

b) (1,5 puntos) Calcula, si existe, la matriz inversa de A para $a=2$

a) A es regular si $|A| \neq 0$

$$|A| = 3a^2 - 5a + 2$$

$$3a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} \quad a_2 = 1$$

$\Rightarrow A$ es regular si $a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; |A| = 4$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$(\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{3F_3 - 2F_2 \\ 3F_1 + F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 + F_3 \\ 4F_2 - F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 0 & 6 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -4 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{12}F_1 \\ \frac{1}{12}F_2 \\ \frac{1}{4}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 3/4 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

3. Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato.

$$F = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{grande} \\ \rightarrow \text{normal} \end{matrix} \quad G = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{grande} \\ \rightarrow \text{normal} \end{matrix}$$

a) (1,5 punto) Efectúe los productos $F^t G$ y $F G^t$

b) (0,75 puntos) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.

c) (0,75 puntos) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

$$a) F^t \cdot G = \begin{pmatrix} 1400 & 1800 & 1100 \\ 1900 & 2450 & 1500 \\ 1040 & 1340 & 820 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot G^t = \begin{pmatrix} 2200 & 1390 \\ 3900 & 2470 \end{pmatrix}$$

b) $F^t \cdot G \rightarrow$ en los elementos de la diagonal

$$\text{Ganancias} = \overset{A}{1400} + \overset{B}{2450} + \overset{C}{820} = 4670 \text{ €}$$

c) $F \cdot G^t \rightarrow$ en los elementos de la diagonal

$$\text{Ganancias} = \overset{\text{Grande}}{2200} + \overset{\text{pequeño}}{2470} = 4670 \text{ €}$$

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (2,5 puntos) Calcule la matriz P que verifica $B \cdot P - A = C^t$

b) (0,75 puntos) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$

c) (0,75 puntos) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

$$a) P = B^{-1} \cdot (C^t + A)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t + A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$B \cdot P = \begin{pmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ 2a+2d & 2b+2e & 2c+2f \end{pmatrix}$$

$$B \cdot P - A = \begin{pmatrix} 2a+d-2 & 2b+e+1 & 2c+f \\ 2a+2d & 2b+2e-2 & 2c+2f+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+d-2=1 \\ 2a+2d=-2 \\ 2b+e+1=0 \\ 2b+2e-2=2 \\ 2c+f=-2 \\ 2c+2f+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-5 \\ a=4 \\ e=5 \\ b=-3 \\ f=1 \\ c=-3/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A \cdot M \cdot C \Rightarrow M \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$$

$2 \times 3 \quad \quad 3 \times 2$

$$c) C^t \cdot N \Rightarrow N \rightarrow \begin{matrix} 3 \text{ filas} \\ 2 \text{ columnas} \end{matrix}$$

$N \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ x-2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & x \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Calcula los valores de x para que la matriz A sea regular.

b) (1,5 puntos) Calcula, si existe, la matriz inversa de A para $x=2$

a) A es regular si $|A| \neq 0$

$$|A| = 3x^2 - 5x + 2$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 1$$

$\Rightarrow A$ es regular si $x \in \mathbb{R} - \left\{1, \frac{2}{3}\right\}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = 4$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[2F_3 - F_2]{2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}F_3]{\frac{1}{4}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

3. Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1 , A_2 y A_3 en dos

comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 \\ C_2 \end{matrix}$

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1 , 1 de A_2 y 3 de A_3 .

Manuel desea comprar 5 unidades de A_1 , 1 de A_2 y 1 de A_3 .

Han dispuesto esas compras en la matriz Q: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \text{Cati} \\ \text{Manuel} \end{matrix}$

a) (2 puntos) Calcule $P \cdot Q^t$ y $Q \cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.

b) (1 punto) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

$$a) P \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 115 & 160 \\ 122 & 157 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Cati} & \text{Manuel} \\ C_1 \\ C_2 \end{matrix}$$

Coste de la compra de Cati en $C_1 = 115€$
 $C_2 = 122€$

$$Q \cdot P^t = \begin{pmatrix} 115 & 122 \\ 160 & 157 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 & C_2 \\ \text{Cati} \\ \text{Manuel} \end{matrix}$$

Coste de la compra de Manuel en $C_1 = 160€$
 $C_2 = 157€$

b) A Cati le interesa hacer la compra en C_1 .

A Manuel le interesa hacer la compra en C_2 .