

1. Determine el dominio y asíntotas de las funciones:

a) $m(x) = \frac{2x+3}{x-4}$

Esta función no existe para aquellos valores que anulen al denominador: $x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow$

$$\text{Dom}(m(x)) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$$

Estudio de las asíntotas:

Asíntotas verticales: pueden existir en los puntos en los que se anula el denominador. Estudiamos los límites laterales en $x=4$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x+3}{x-4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x+3}{x-4} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto en $x=4$ hay una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: estudiamos los límites en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-4} = 2 \Rightarrow \text{en } y=2 \text{ hay asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-4} = 2 \Rightarrow \text{en } y=2 \text{ hay asíntota horizontal.}$$

b) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

Esta función no existe para aquellos valores que anulan el denominador: $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Estudio de las asíntotas:

Asíntotas verticales: pueden existir en los puntos en los que se anula el denominador. Estudiamos los límites laterales en $x=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1/3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1/3}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto en $x=\frac{1}{2}$ hay una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: estudiamos los límites en el infinito:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{en } y = \frac{1}{2} \text{ hay asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{en } y = \frac{1}{2} \text{ hay asíntota horizontal.}$$

2. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

Una función es continua en $x=a$ si se verifica: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Las funciones polinómicas, logarítmicas y exponenciales son continuas en todo su dominio. Las funciones racionales son discontinuas donde se anula el denominador.

a) Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

$1-2x$ es continua por ser polinómica.

$\frac{1}{x+1}$ es continua en el rango en el que está definida ($x > 0$, sólo sería discontinua en $x=-1$, pero en este valor de la variable x la función tiene otra expresión).

Hay que estudiar la continuidad en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-2x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en } x=0.$$

Por lo tanto la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

3^x es continua por ser una función exponencial.

$x^2 - 6x + 8$ es continua por ser una función polinómica.

Hay que estudiar la continuidad de la función en $x=1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 3^x = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 6x + 8) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en } x=1.$$



Por lo tanto la función es continua en todo su dominio.

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Analice la continuidad en su dominio.

$x^2 + x$ es continua por ser una función polinómica.

$\frac{x}{x+1}$ es continua en $x \geq 0$ (ya que el único punto de discontinuidad estaría en $x = -1 < 0$).

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en } x = 0.$$

Luego la función es continua en todo su dominio.

b) Determine la asíntota horizontal, si la tiene.

Estudiamos los límites en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow \text{La función tiene asíntota horizontal en } y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = +\infty \quad \text{Cuando } x \rightarrow +\infty \text{ la función no tiene asíntota horizontal.}$$

c) Determine la asíntota vertical, si la tiene.

Las asíntotas verticales las podemos encontrar en los puntos de discontinuidad de las funciones racionales. En este caso, como la función es continua en todo su dominio, no hay asíntotas verticales.

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-k}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

a) Calcule el valor de k para que la función f sea continua en $x = 0$.

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe verificarse: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-k}{x+1} = -k \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x + 1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Para que la función sea continua en } x = 0 \text{ debe ser } -k = 1 \Rightarrow k = -1.$$

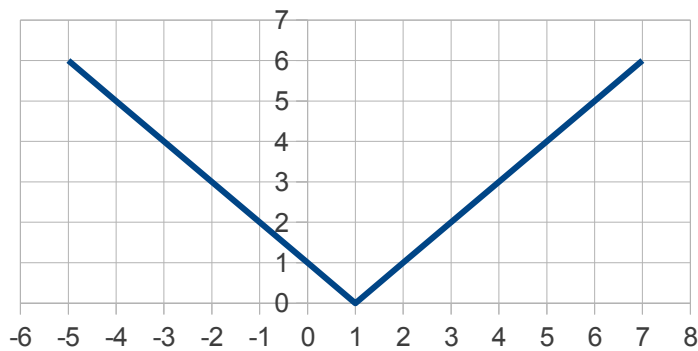
b) Para $k = 0$, calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x + 1) = +\infty$$

5. Sea la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a) Represente gráficamente la función.



b) Estudie la continuidad de la función.

La función es continua en cada una de sus partes por ser éstas continuas.

Hay que estudiar la continuidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1)=0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1)=0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en todo su dominio.}$$

