Nombre y Apellidos: ………………………………………………………………………….

1. El tiempo (en horas) que permanecen los coches en un determinado taller de reparación es una variable aleatoria con distribución Normal de desviación típica 4 horas.

a) Se eligieron, al azar, 16 coches del taller y se comprobó que, entre todos, estuvieron 136 horas en reparación. Determine un intervalo de confianza, al 98.5%, para la media del tiempo que permanecen los coches en el taller.

Tiempo de espera: $N(\mu, 4)$

$n=16 \rightarrow 136$ horas en total $\Rightarrow \dfrac{136}{16}=8.5\,\text{horas}=\bar{X}$ (tiempo medio de espera de la muestra)

$1-\alpha=0.985 \Rightarrow 1-\alpha=P(-z_{\alpha/2}<z<z_{\alpha/2})=2P(z<z_{\alpha/2})-1 \Rightarrow P(z<z_{\alpha/2})=0.9925 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.43$

Intervalo de confianza: $(\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})=(6.07, 10.93)$

b) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra que permita estimar la media del tiempo que permanecen en reparación los coches en ese taller con un error en la estimación no superior a una hora y media y con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

Error < 1.5 hora $\Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.43\cdot\dfrac{4}{\sqrt{n}}<1.5 \Rightarrow n=\left(2.43\cdot\dfrac{4}{1.5}\right)^2=41.99$ Luego el tamaño de la muestra debe ser de al menos 42 coches.

2. Se ha aplicado un medicamento a una muestra de 200 enfermos y se ha observado una respuesta positiva en 140 de ellos. Estímese, mediante un intervalo de confianza del 99%, la proporción de enfermos que responderán positivamente si este medicamento se aplicase a la población de la que se ha extraído la muestra.

Total: n=200 enfermos

Respuesta positiva: 140 enfermos $\Rightarrow \hat{p}=\dfrac{140}{200}=0.7 \Rightarrow \hat{q}=1-\hat{p}=0.3$

$1-\alpha=0.99 \Rightarrow 1-\alpha=P(-z_{\alpha/2}<z<z_{\alpha/2})=2P(z<z_{\alpha/2})-1 \Rightarrow P(z<z_{\alpha/2})=0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.58$

Intervalo de confianza: $(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})=(0.616, 0.784)$

La proporción de enfermos que responderá positivamente al medicamento estará entre el 61.6% y el 78.4%.

3. Se ha lanzado una moneda al aire 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones.

a) Estime, mediante un intervalo de confianza, al 90%, la probabilidad de obtener cara.

Número de lanzamientos: n= 200

Caras obtenidas: 120 $\Rightarrow \hat{p}=\dfrac{120}{200}=0.6 \Rightarrow \hat{q}=1-\hat{p}=0.4$

$$1-\alpha=0.90 \Rightarrow 1-\alpha=P(-z_{\alpha/2}<z<z_{\alpha/2})=2P(z<z_{\alpha/2})-1 \Rightarrow P(z<z_{\alpha/2})=0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1.65$$

Intervalo de confianza: $\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)=(0.543,0.657)$

b) Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 97%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

$$1-\alpha=0.97 \Rightarrow 1-\alpha=P(-z_{\alpha/2}<z<z_{\alpha/2})=2P(z<z_{\alpha/2})-1 \Rightarrow P(z<z_{\alpha/2})=0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.17$$

Error < 0.03 $\Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}=2.17\cdot\sqrt{\dfrac{0.6\cdot 0.4}{n}}<0.03 \Rightarrow n>\left(\dfrac{2.17}{0.03}\right)^2\cdot 0.6\cdot 0.4=1255.71$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1256 lanzamientos.

4. La resistencia a la rotura, de un tipo de hilos de pesca, es una variable aleatoria Normal, con media 4 kg y desviación típica 1.4 kg. Se toman muestras aleatorias de 25 hilos de este tipo y se obtiene la resistencia media a la rotura.

a) ¿Cómo se distribuye la resistencia media a la rotura?

Población: N(4, 1.4)

n=25 ⇒ Muestra: N(4, 0.28) (suponemos que sigue una distribución Normal, aunque el tamaño de la muestra no es grande)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia media a la rotura no pertenezca al intervalo de extremos 3.90 kg y 4.15 kg ?

La probabilidad de que la resistencia media **no** esté en el intervalo indicado es: 1-P(3.90<x<4.15)

Calculamos P(3.90<x<4.15). La variable no está tipificada

$$\Rightarrow P(3.90<x<4.15)=P\left(\frac{3.90-4}{0.28}<z<\frac{4.15-4}{0.28}\right)=P(-0.36<z<0.54)=$$

$$=P(z<0.54)-P(z<-0.36)=P(z<0.54)-1+P(z<0.36)=0.7054-1+0.6406=0.346$$

Luego la probabilidad de no estar en dicho intervalo es 1 – 0.346 = 0.654