CÁLCULO DE PRIMITIVAS

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN: $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ si $F'(x)=f(x)$

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$ → integral indefinida de $f(x)$.

Existen infinitas primitivas de una misma función $f(x)$ y se diferencian entre ellas en una constante:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+k}$$

PROPIEDADES

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int A f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$$

Integral de una potencia: $(n\in\mathbb{R})$

$$\int dx = \int 1\cdot dx = x+k$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+k \quad ; \; n\neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+k$$

Integrales trigonométricas: $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + k$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + k$$

$$\int (1+\operatorname{tg}^2 x) \, dx = \operatorname{tg} x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + k$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + k$$

Integrales exponenciales: $\int e^x \, dx = e^x + k$

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + k$$

Regla de la cadena: $\int g'(f(x)) \cdot f'(x) \, dx = g(f(x)) + k$

Cambio de variable: En ocasiones, en una integral de una función compuesta es más sencillo introducir un cambio de variable:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx \underset{t=g(x) \,\Rightarrow\, dt = g'(t)\,dt}{=} \int f(t) \, dt = F(t) + k = \underline{F[g(x)] + k}$$

Hay que "DESHACER" el cambio de variable

Integral "por partes": $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Viene de la derivada de un producto de funciones: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$

Para abordar este tipo de integrales de forma sencilla podemos usar la regla:

A → arccos, arcsen, arctg

L → logaritmo

P → potencia

E → exponencial

S → seno, coseno

Según esta regla, elegiremos nuestra función "u" según la que se encuentre en primer lugar en "ALPES".

Integrales de funciones racionales: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Consideraremos únicamente aquellas en las que $Q(x)$ tiene raíces reales y con grado$(P(x)) <$ grado$(Q(x))$.

Si grado$(P(x)) \geq$ grado$(Q(x))$ empezamos haciendo la división: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

$Q(x) = mx+n$ ⇒ la integral es de tipo logaritmo neperiano.

$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)$: raíces simples

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{A(x-x_2)+B(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Los denominadores a ambos lados de la igualdad serán iguales ⇒ igualamos los numeradores y así obtenemos los valores A y B.

$$\longrightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-x_1}\,dx + \int \frac{B}{x-x_2}\,dx = A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2|$$

(se resuelve de forma análoga si el número de raíces es 2, 3, 4, ..., simplemente habrá mas parámetros que obtener: A, B, C, D, ...)

$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)^2(x-x_3)^3$: algunas raíces múltiples.

Resolvemos de manera similar al caso de raíces simples, pero añadiendo fracciones por cada raíz múltiple:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{D}{x-x_3} + \frac{E}{(x-x_3)^2} + \frac{F}{(x-x_3)^3}$$

Realizamos la suma del segundo miembro y resolvemos como lo hicimos antes.