1.

a) Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas (esto es de dimensión 3x4) y C una matriz 2x3. ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz A·B·C? ¿Qué dimensión tiene A·B·C?

b) Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1x1 y el producto de la traspuesta de D por D es 3x3. ¿Cuántas filas y columnas tiene D? ¿Tiene D inversa?

c) Siendo $\mathbf{E}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ la traspuesta de la matriz E, calcular el determinante de la matriz $\mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}$.

a) $A \in \mathcal{M}_{3x4}$

$C \in \mathcal{M}_{2x3}$

$A \cdot B \cdot C \Rightarrow B$ tiene 4 filas (= columnas de A) y 2 columnas (= filas de C)

$\Rightarrow \underline{B \in \mathcal{M}_{4x2}}$

$\underline{A \cdot B \cdot C \in \mathcal{M}_{3x3}}$

b) $D \cdot D^t \in \mathcal{M}_{1x1} \rightarrow D$ tiene 1 fila

$D^t \cdot D \in \mathcal{M}_{3x3} \rightarrow D$ tiene 3 columnas

$\underline{D \in \mathcal{M}_{1x3}}$

D NO tiene inversa, ya que no es cuadrada.

c) $E^t \cdot E = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = (14) \Rightarrow |E^t \cdot E| = 14$.

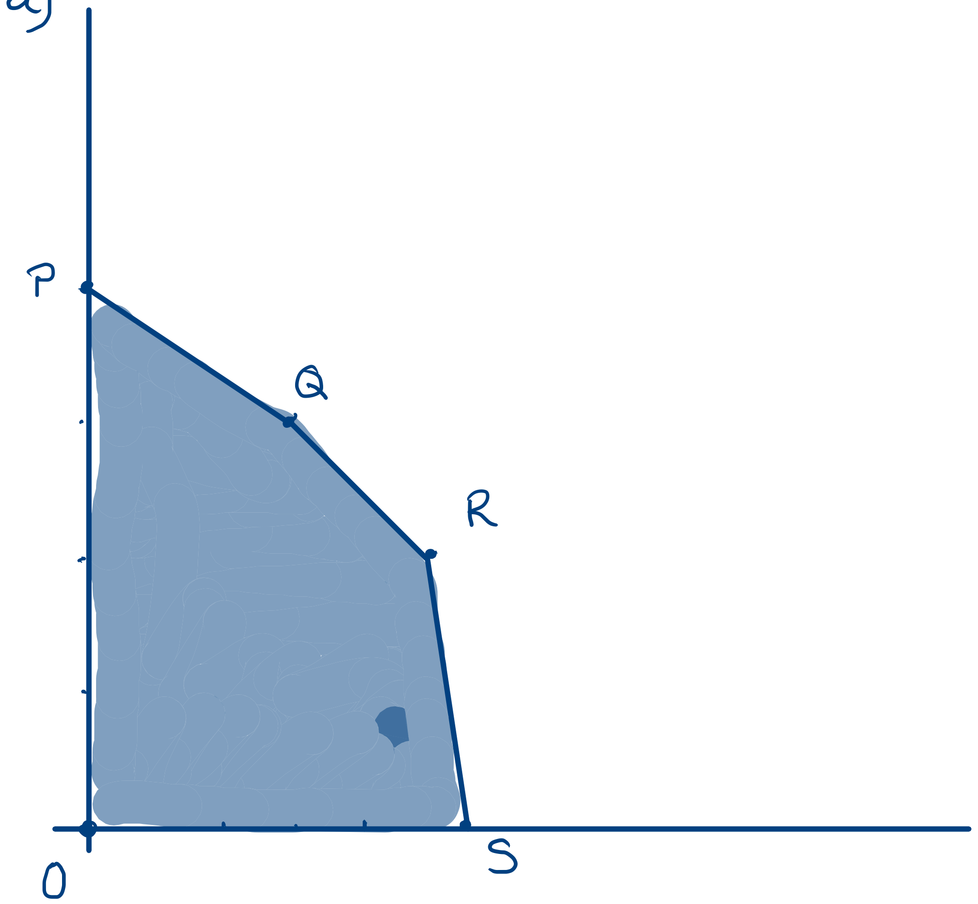
2. En un problema de programación lineal la región factible es el pentágono convexo que tiene de vértices los puntos: 0(0,0), P(0,4), Q(3/2,3), R(5/2,2) y S(11/4,0) y la función objetivo que hay que maximizar es f(x,y) = 2x + ay (a es un número real positivo).

a) Dibujar la región factible.

b) Hallar el vértice, o punto extremo, del mismo en el que la función objetivo alcanza el máximo para $a=\frac{1}{2}$.

c) Encontrar un valor de "a" para que el máximo se alcance en el punto (0,4).

a)



b) $f(x,y) = 2x + \frac{1}{2}y$

$f(0,0) = 0$

$f(0,4) = 2$

$f\left(\frac{3}{2},3\right) = \frac{9}{2}$

$f\left(\frac{5}{2},2\right) = 6 \rightarrow$ máximo

$f\left(\frac{11}{4},0\right) = \frac{11}{2}$

Alcanza el máximo en el punto $R\left(\frac{5}{2},2\right)$.

c) $f(x,y) = 2x + ay$

$f(0,0) = 0$

$f(0,4) = 4a \rightarrow$ máximo: $4a > 3+3a$ ①
$4a > 3+2a$ ②
$4a > \frac{11}{2}$ ③

$f\left(\frac{3}{2},3\right) = 3+3a$

$f\left(\frac{3}{2},2\right) = 3+2a$

$f\left(\frac{11}{4},0\right) = \frac{11}{2}$

① $\Rightarrow a > 3$

② $\Rightarrow a > \frac{3}{2}$

③ $\Rightarrow a > \frac{11}{8}$

Se alcanza el máximo en el punto P(0,4) para cualquier valor mayor que 3.

3. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & \lambda & -1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

a) Razonar si existe la matrix $(A-2\cdot C\cdot B\cdot C)^{-1}$

b) Razonar si existe la matriz $(2A-B\cdot C)^{-1}$

c) En ambos casos, y cuando sea posible, calcular las matrices inversas.

a) $\underset{3\times2}{C}\cdot\underset{2\times3}{B}\cdot\underset{3\times2}{C} \in M_{3\times2} \Rightarrow A-2C\cdot B\cdot C$ no puede hacerse ya que no tienen la misma dimensión.

b) $(2A-B\cdot C) = \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & \lambda+4\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2-\lambda & -\lambda\\ 7 & 0\end{pmatrix}$

$|2A-BC| = 7\lambda \rightarrow$ El determinante será distinto de cero si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists$ inversa si $\lambda \neq 0$.

c) Calculamos la inversa del apartado b (ya que la del apartado a no exisite).

$M = 2A-BC$

$|M| = 7\lambda$

$Adj(M) = \begin{pmatrix}0 & -7\\ \lambda & -2-\lambda\end{pmatrix}$

$M^{-1} = \dfrac{1}{7\lambda}\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ -7 & -2-\lambda\end{pmatrix}$

4.

a) Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & x & 3\\ 4 & 1 & -x\end{pmatrix}$

b) Calcular la inversa de A cuando x=2.

a) Una matriz no tiene inversa si su determinante es nulo.

$$|A| = -x^2+4x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}}$$

Para $x \in \{1,3\}$ la matriz NO tiene inversa.

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$; $|A| = 1 \Rightarrow \exists A^{-1}$

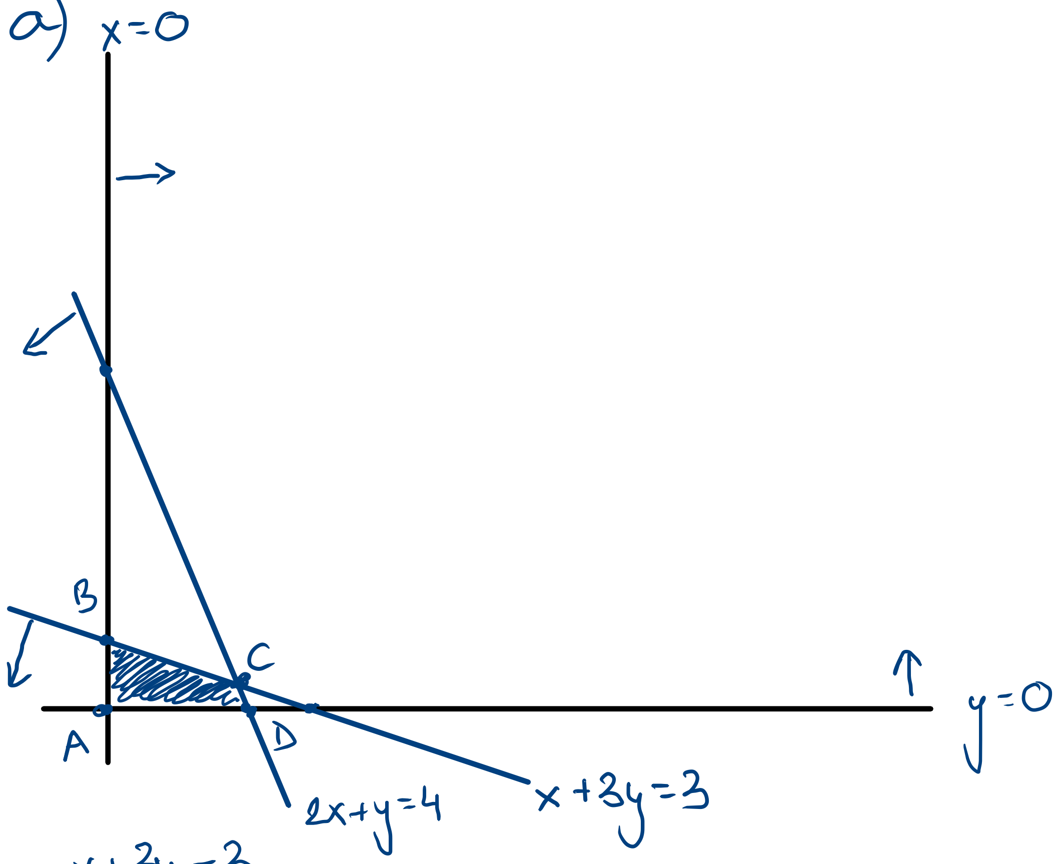
$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

5. Sea el siguiente sistema de inecuaciones: $x + 3y \le 3$; $2x + y \le 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

a) Dibujar el conjunto de puntos definidos por las inecuaciones.

b) Maximizar, en dicho conjunto, la función objetivo $F(x,y) = 2x + 3y$.

a)



$x + 3y = 3$

x	0	3
y	1	0

$2x + y = 4$

x	0	2
y	4	0

b) $A(0,0)$ $\qquad f(0,0) = 0$

$B \begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \rightarrow B(0,1) \qquad f(0,1) = 3$

$C \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right) \qquad f\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{24}{5} \rightarrow$ Máximo.

$D \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D(2,0) \qquad f(2,0) = 4$

La función alcanza el máximo en el punto $C\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$, siendo $\frac{24}{5}$ su valor.

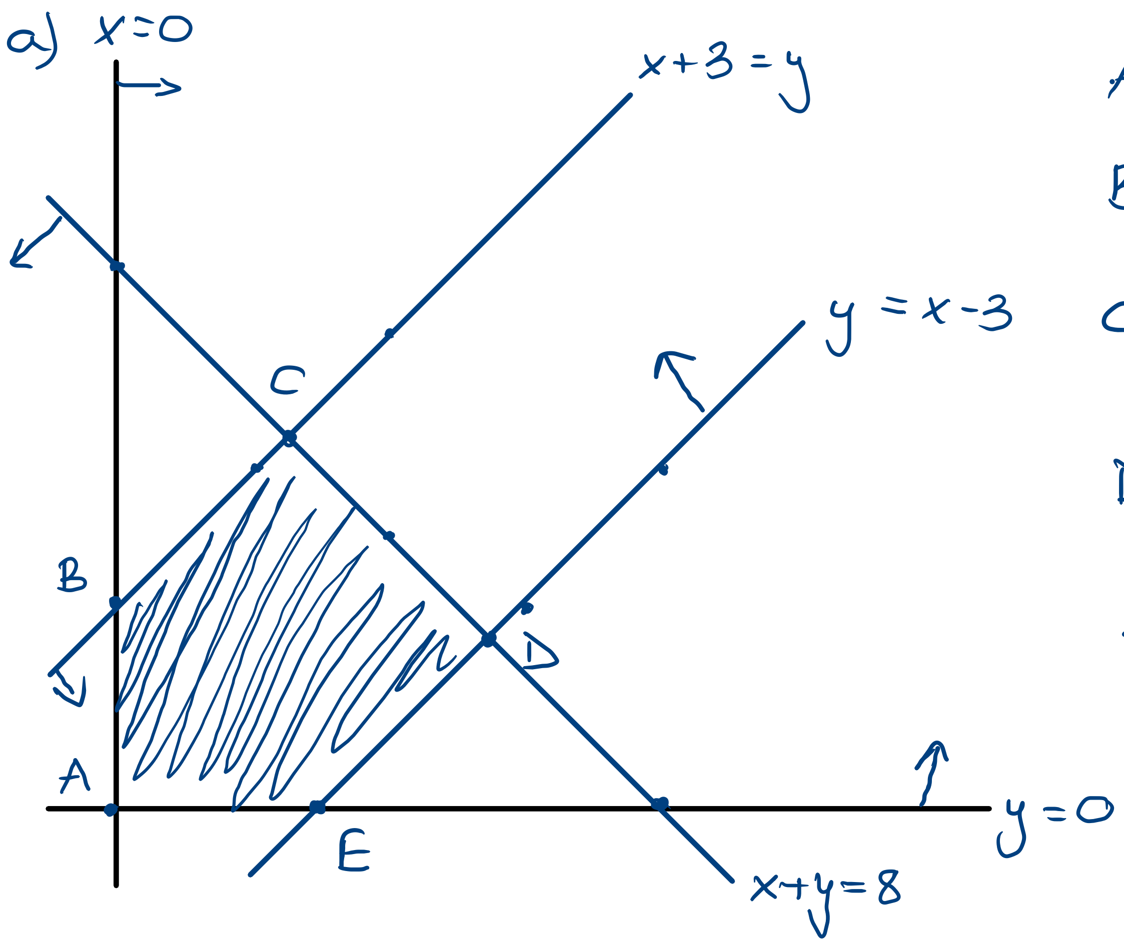
6. Se considera la región del plano determinada por las inecuaciones:

$$x + 3 \geq y;\ x + y \leq 8;\ y \geq x - 3;\ x \geq 0;\ y \geq 0.$$

a) Dibujar la región que definen y calcular sus vértices.

b) Hallar el punto de esa región en el que la función F(x,y) = 6x + 4y alcanza el valor máximo y calcular dicho valor.

a)



$A(0,0)$

$B(0,3)$

$C\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)$

$D\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)$

$E(3,0)$

$x+3=y$

x	0	2	4
y	3	5	7

$x+y=8$

x	0	4	8
y	8	4	0

$y=x-3$

x	3	6	8
y	0	3	5

b) $F(x,y)=6x+4y$

$F(0,0)=0$

$F(0,3)=12$

$F\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)=\frac{74}{2}=37$

$F\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{86}{2}=43 \rightarrow$ Máximo

$F(3,0)=18$

La función alcanza su máximo en el punto $D\left(\frac{11}{2},\frac{5}{2}\right)$, siendo su valor 43.

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Explicar si hay alguna matriz X de orden 2 tal que A·X=B·X.

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AX=\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix}$$

$$BX=\begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 6a+4c & 6b+4d \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow AX=BX \Rightarrow \begin{matrix} 2a+c=3a+2c \\ 2b+d=3b+2d \\ 4a+2c=6a+4c \\ 4b+2d=6b+4d \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Cualquier matriz con esta condición verifica la igualdad.