

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Resuelva, si es posible, la

ecuación matricial $B \cdot A + 2X = C$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C - BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}(C - BA) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$2X = C - BA$$

$$X = \frac{1}{2}(C - BA)$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$

b) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$

$$a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2$$

...

$$\left. \begin{array}{l} A^{2018} = I_2 \\ A^{2019} = A \end{array} \right\} \Rightarrow A^{2018} + A^{2019} = I_2 + A = \underline{\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}}.$$

$$b) \quad A \cdot A = I_2 \Rightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$XA = 2A - BB^t \Rightarrow X = (2A - BB^t)A^{-1} = 2A^2 - BB^t A$$

$$X = 2I_2 - BB^t A$$

$$\underline{\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}}}}.$$

3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

b) Haciendo $m=4$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) A tiene inversa si $|A| \neq 0$.

Calculamos el determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= 3(m+1) + (m+1)(m-6) - 12 = \\ &= m^2 - 2m - 15 \end{aligned}$$

Igualemos a 0 y resolvemos la ecuación: $m^2 - 2m - 15 = 0$

$$\Rightarrow m = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ tiene inversa si $m \neq \{-3, 5\}$

b) $m=4 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}$

Calculamos A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -15 & -5 & 6 \\ -10 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

4. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Determina α , si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

$AX=C$ y $BX=D$ tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

↓
SCI $\Rightarrow \text{Rango}(\text{coef.}) = \text{Rango}(\text{amp}) < 3$

Comenzamos estudiando el sistema $AX=C$.

$$|A| = 2\alpha^2 + 8\alpha = 2\alpha(\alpha+4) \rightarrow |A|=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha=-4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} A' = (A|C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 2 \Rightarrow AX=C \text{ es SCI.} \\ \alpha=0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A' = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 3 \Rightarrow AX=C \text{ es SI} \\ \alpha=-4 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ No es válido $\alpha=4$.

Estudiamos ahora el sistema $BX=D$

$$|B| = 2\alpha^2 - \alpha \Rightarrow |B|=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comprobamos si el sistema $BX=D$

es SCI para $\alpha=0$ (único valor que nos interesa, ya que $\alpha=\frac{1}{2}$ no nos sirve para el sist. $AX=C$)

$$\begin{matrix} B' = (B|D) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(B') = 2 \\ \alpha=0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Si $\alpha=0$ los dos sistemas de ecuaciones dados son compatibles indeterminados $\Rightarrow$ tienen infinitas soluciones.

5. Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches. La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y reporta un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y reporta un beneficio de 15 euros.

Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

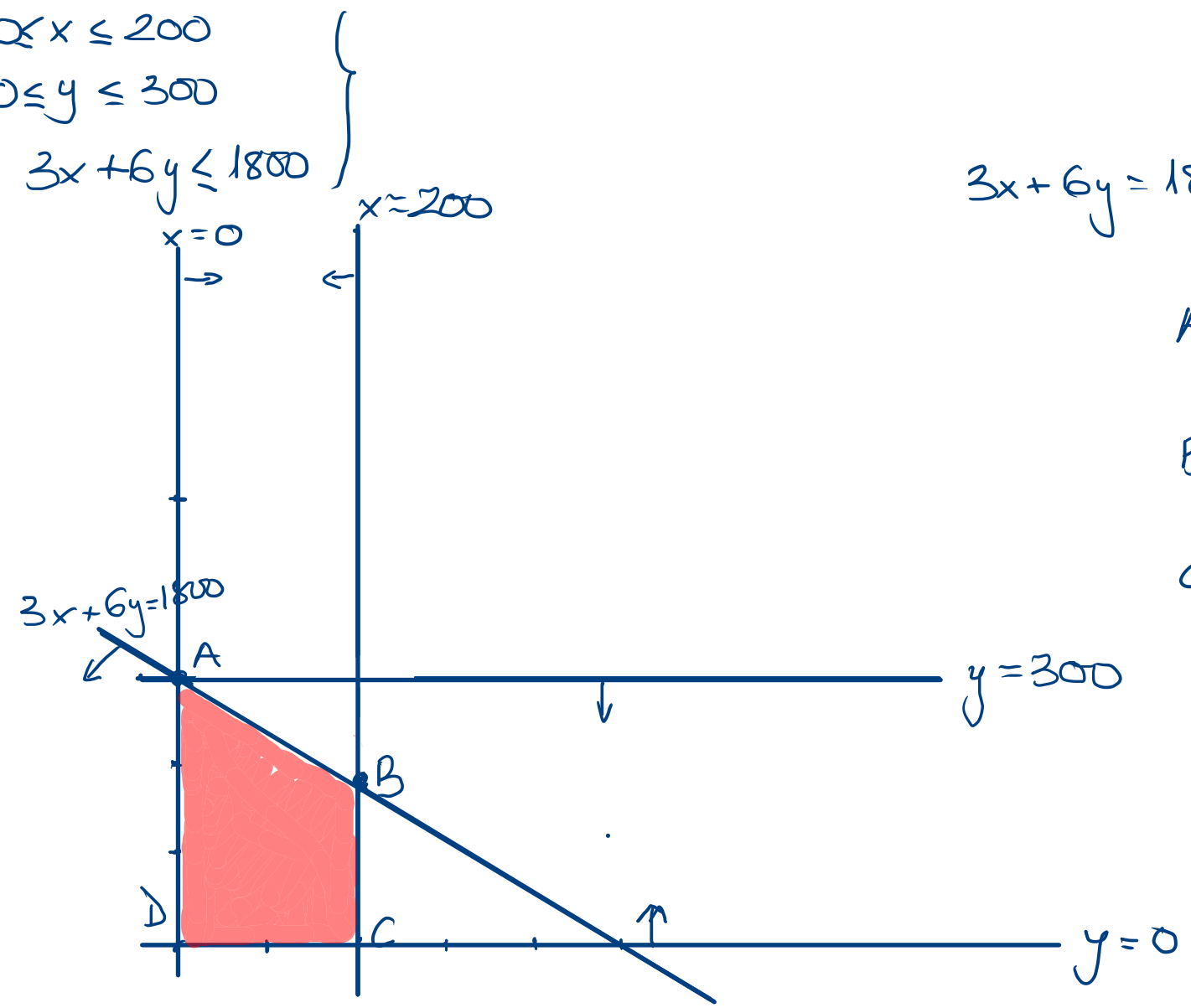
		Tiempo (h)	Beneficio (€)	
Muñecas	x	3	10	≤ 200
Coches	y	6	15	≤ 300
		≤ 1800		

Beneficio global: $F(x,y) = 10x + 15y \rightarrow \text{máximo}$

Restricciones:

$0 \leq x \leq 200$
 $0 \leq y \leq 300$

$3x + 6y \leq 1800$



$3x + 6y = 1800 \rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 600 \\ \hline y & 300 & 0 \end{array}$

$A: \begin{cases} x=0 \\ y=300 \end{cases} \quad A(0,300) \rightarrow F(0,300) = 4500$

$B: \begin{cases} x=200 \\ 3x+6y=1800 \end{cases} \quad B(200,200) \rightarrow F(200,200) = 5000 \leftarrow$

$C: \begin{cases} x=200 \\ y=0 \end{cases} \quad C(200,0) \rightarrow F(200,0) = 2000$

$D: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad D(0,0) \rightarrow F(0,0) = 0$

El beneficio máximo será de 5000€, fabricando 200 muñecas y 200 coches teledirigidos.

6. Una granja elabora una dieta mezclando dos tipos de pienso A y B. El pienso A aporta 2 unidades de Calcio y 1 de Hierro por cada kilogramo, mientras que el B aporta 1 de Calcio y 2 de Hierro. El coste por kilogramo tanto del pienso A como del pienso B es 1 euro por kilogramo. La dieta deberá aportar al menos 2 unidades de Calcio y 2 de Hierro. Determine los kilogramos que se han de mezclar de cada tipo de pienso para que el coste de la dieta sea mínimo. ¿Cuál sería dicho coste? ¿Cuántas unidades de Hierro y de Calcio se administrarán a los animales con esta dieta?

	Calcio	Hierro	Coste (€/kg)
A	2	1	1
B	1	2	1
	≥ 2	≥ 2	

$$\text{Coste: } f(A,B) = A + B$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ 2A + B \geq 2 \\ A + 2B \geq 2 \end{array} \right\}$$

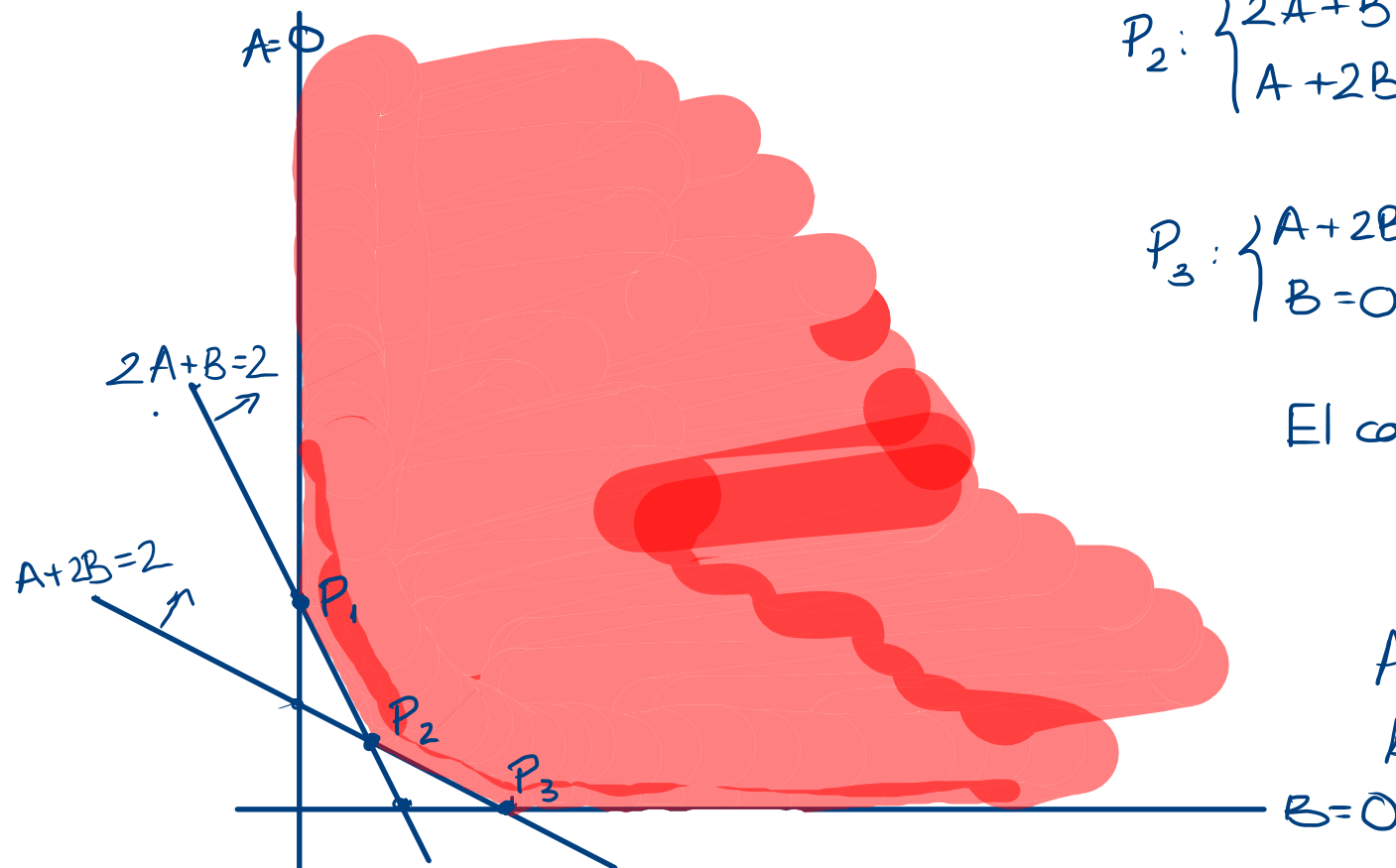
$$2A + B = 2 \quad \begin{array}{c|ccc} A & 0 & 1 & -1 \\ B & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

$$A + 2B = 2 \quad \begin{array}{c|ccc} A & 0 & 2 & -2 \\ B & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

$$P_1: \begin{cases} A = 0 \\ 2A + B = 2 \end{cases} \rightarrow P_1(0, 2) \rightarrow f(0, 2) = 2$$

$$P_2: \begin{cases} 2A + B = 2 \\ A + 2B = 2 \end{cases} \rightarrow P_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \rightarrow f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$P_3: \begin{cases} A + 2B = 2 \\ B = 0 \end{cases} \rightarrow P_3(2, 0) \rightarrow f(2, 0) = 2$$



El coste mínimo se alcanza con $\frac{2}{3}$ kg de cada tipo de pienso, siendo de $\frac{4}{3} = 1,3$ €/kg.

$$\text{Aporte de Hierro: } \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \text{ U/kg}$$

$$\text{Aporte de Calcio: } \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \text{ U/kg}$$