Representa las siguientes funciones haciendo previamente el estudio:

1. $f(x)=3x-x^3$

$Dom(f)=\mathbb{R}$ (la función es polinómica)

Asíntotas:

Horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}(3x-x^3)=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}(3x-x^3)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal

Vertical: No tiene asíntota vertical (ya que no presenta ninguna discontinuidad)

Puntos de corte:

Eje OX: y=0

$$3x-x^3=0\to\begin{cases}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{cases}$$

$(0,0);(-\sqrt{3},0);(\sqrt{3},0)$

Eje OY: x=0

y=0 $(0,0)$

Signo:

$x<-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<0$	$0<x<\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
f(x)>0	f(x)<0	f(x)>0	f(x)<0

Extremos: $f'(x)=0$

$f'(x)=3-3x^2$ $3-3x^2=0\to\begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}$

$(-1,-2);(1,2)$

Monotonía:

$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente	f'(x)<0 decreciente

(-1,-2) es un mínimo

(1,2) es un máximo

Puntos de inflexión: $f''(x)=0$

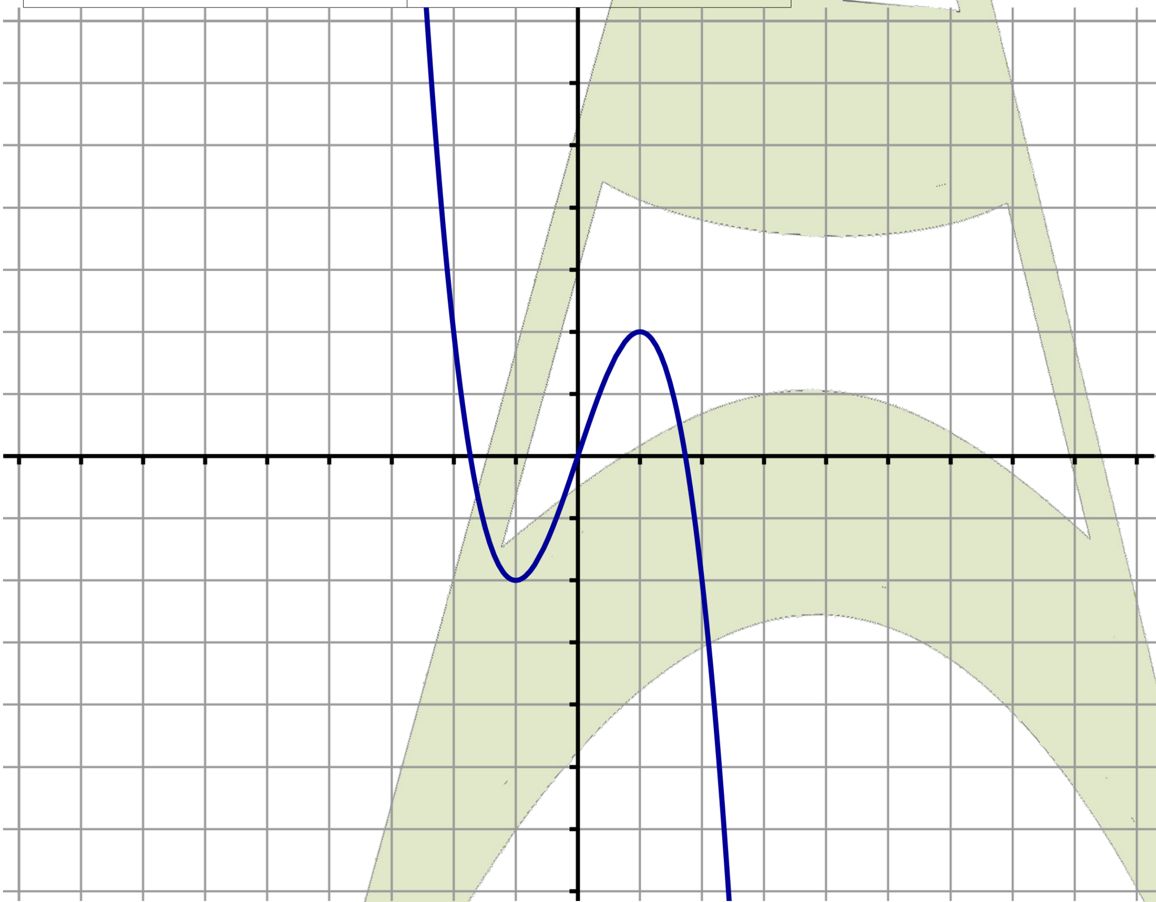
$f''(x)=-6x$

$-6x=0 \rightarrow x=0$

$(0,0)$

Curvatura:

$x<0$	$x>0$
f"(x)>0 convexa	f"(x)<0 cóncava



2. $f(x)=x^4-2x^2-8$

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$ (la función es polinómica)

Asíntotas:

Horizontal: $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} (x^4-2x-8)=+\infty \\ \lim_{x \to -\infty} (x^4-2x-8)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal

Vertical: No tiene asíntota vertical (ya que no presenta ninguna discontinuidad)

Puntos de corte:

Eje OX: y=0

$x^4-2x^2-8=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$

$(-2,0);(2,0)$

Eje OY: x=0

y=-8 $(0,-8)$

Signo:

$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
f(x)>0	f(x)<0	f(x)>0

Extremos: $f'(x)=0$

$f'(x)=4x^3-4x$

$4x^3-4x=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ $(-1,-9);(0,-8);(1,-9)$

Monotonía:

$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente	f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente

(-1,-9) es un mínimo

(0,-8) es un máximo

(1,-9) es un mínimo

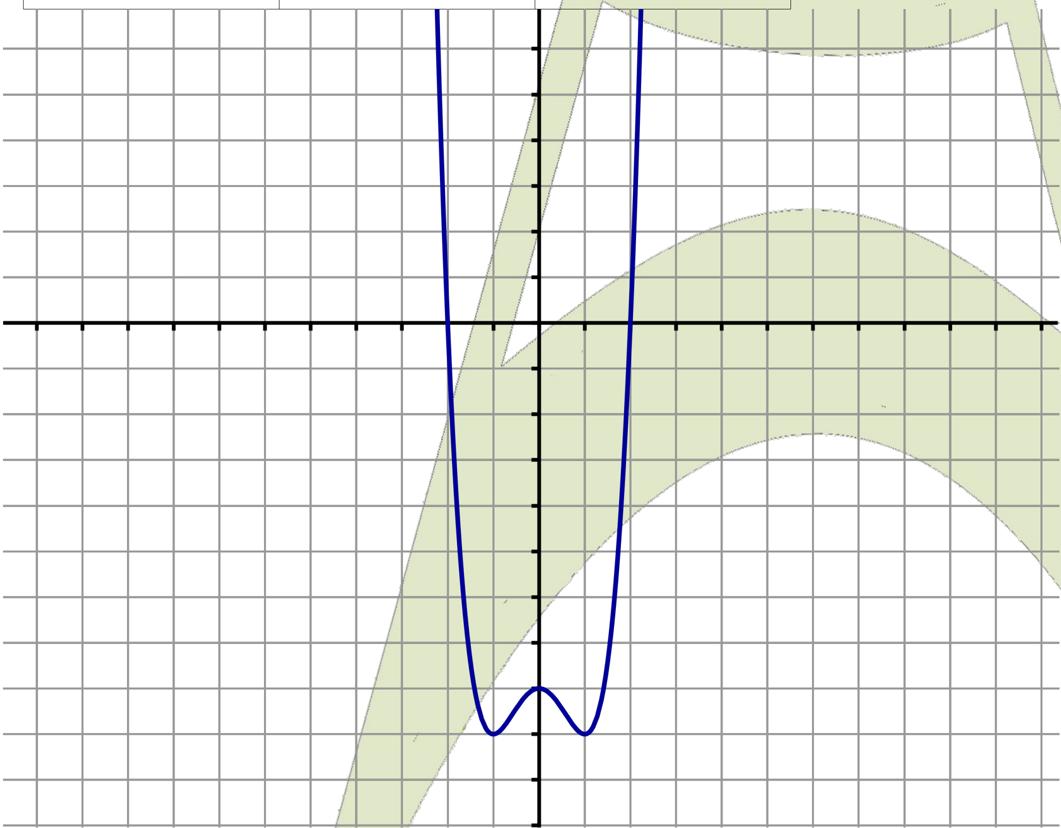
Puntos de inflexión: $f''(x)=0$

$$f''(x)=12x^2-4$$

$$12x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{\sqrt{3}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},-\frac{77}{9}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{77}{9}\right)$$

Curvatura:

$x<\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{3}}$
f"(x)>0 convexa	f"(x)<0 cóncava	f"(x)>0 convexa



3. $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$ (la función es racional)

Asíntotas:

Horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal

Vertical: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ Tiene asíntota vertical en x=1

Puntos de corte:

Eje OX: y=0

$\frac{x^3}{(x-1)^2}=0\to x=0$ $(0,0)$

Eje OY: x=0

y=0 $(0,0)$

Signo:

x<0	0<x<1	x>1
f(x)<0	f(x)>0	f(x)>0

Extremos: $f'(x)=0$

$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$ $\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0\to\left\{\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$ $(0,0);(3,\frac{27}{4})$

Monotonía:

x<0	0<x<1	1<x<3	x>3
f'(x)>0 creciente	f'(x)>0 creciente	f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente

(0,0) no es un extremo

$\left(3,\frac{27}{4}\right)$ es un mínimo

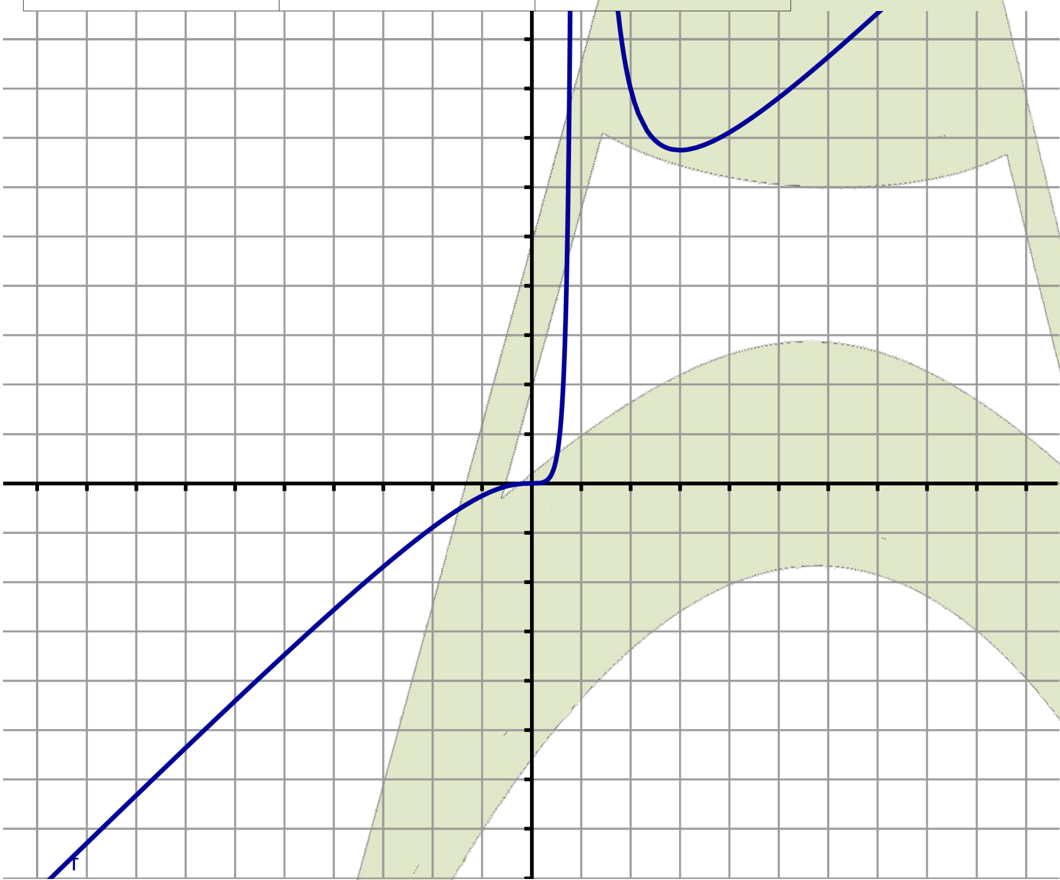
Puntos de inflexión: $f''(x)=0$

$$f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4}=0 \rightarrow x=0$$

$(0,0)$

Curvatura:

$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
f''(x)<0 cóncava	f''(x)>0 convexa	f''(x)>0 convexa



4. $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ (la función es racional)

Asíntotas:

Horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal

Vertical: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^4+1}{x^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^4+1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ Tiene asíntota vertical en x=0

Puntos de corte:

Eje OX: y=0

$\dfrac{x^4+1}{x^2}=0\to x^4=-1$ No corta al eje x.

Eje OY: x=0

No corta al eje y (x=0 no está en el dominio de la función)

Signo:

$x<0$	$x>1$
f(x)>0	f(x)>0

Extremos: $f'(x)=0$

$f'(x)=\dfrac{2x^4-2}{x^3}$ $\quad \dfrac{2x^4-2}{x^3}=0\to\begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}$ $\quad (-1,2);(1,2)$

Monotonía:

$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente	f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente

(-1,2) es un mínimo

(1,2) es un mínimo

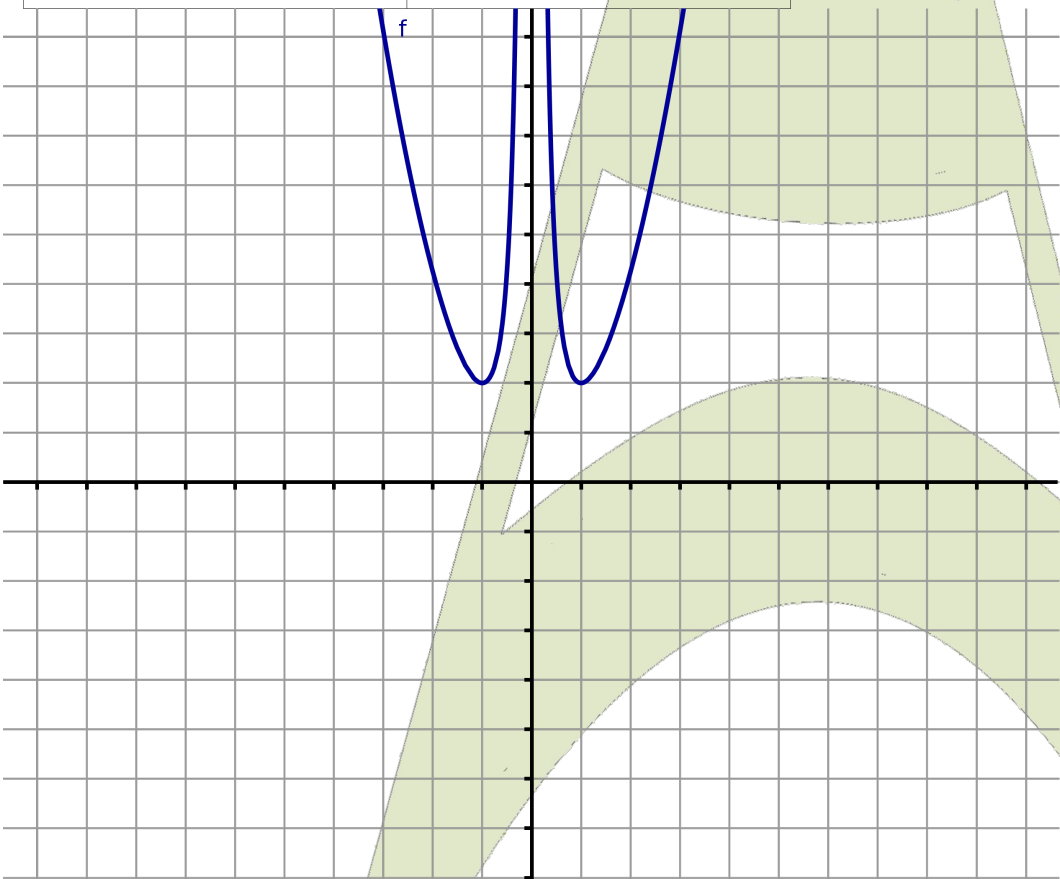
Puntos de inflexión: $f''(x)=0$

$$f''(x)=\frac{2x^4+6}{x^4} \qquad 2x^4+6=0\rightarrow x^4=-3$$

No tiene punto de inflexión.

Curvatura:

$x<0$	$x>0$
$f''(x)>0$ convexa	$f''(x)>0$ convexa



5. $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$ (la función es racional)

Asíntotas:

Horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2-x}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2-x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ No tiene asíntota horizontal

Vertical: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2}{2-x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2}{2-x}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ Tiene asíntota vertical en x=2

Puntos de corte:

Eje OX: y=0

$\frac{x^2}{2-x}=0\to x=0$ (0,0)

Eje OY: x=0 (0,0)

Signo:

$x<0$	$0<x<2$	$x>2$
f(x)>0	f(x)>0	f(x)<0

Extremos: $f'(x)=0$

$f'(x)=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$ $\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=0\to\left\{\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

$(0,0);(4,-8)$

Monotonía:

$x<0$	$0<x<2$	$2<x<4$	$x>4$
f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente	f'(x)<0 creciente	f'(x)<0 decreciente

(0,0) es un mínimo

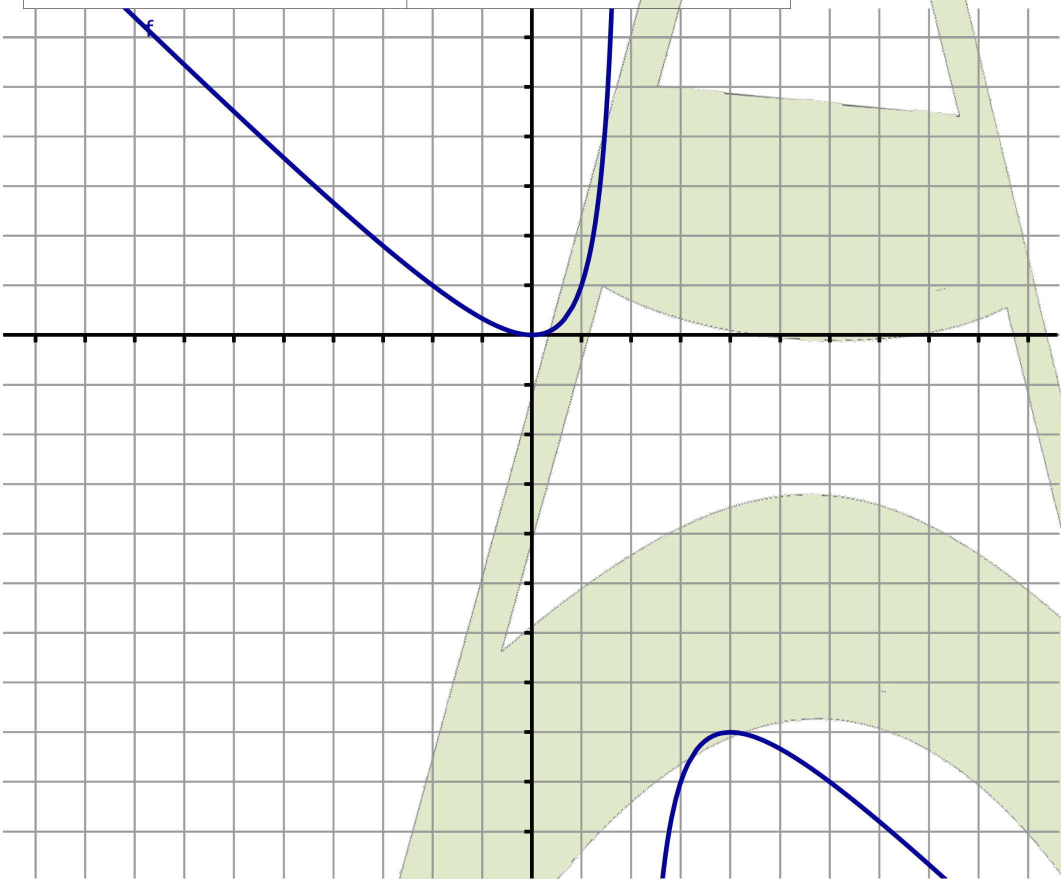
(4,-8) es un máximo

Puntos de inflexión: $f''(x)=0$

$f''(x)=\frac{8}{(2-x)^3}$ $\quad \frac{8}{(2-x)^3}=0 \rightarrow$ No tiene punto de inflexión.

Curvatura:

$x<2$	$x>2$
f"(x)>0 convexa	f"(x)<0 cóncava



6. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

Asíntotas:

Horizontal: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ Tiene asíntota horizontal en y=0

Vertical: No tiene asíntota vertical ya que es continua.

Puntos de corte:

Eje OX: y=0

$\dfrac{x}{1+x^2}=0\rightarrow x=0$ (0,0)

Eje OY: x=0 (0,0)

Signo:

$x<0$	$x>0$
f(x)<0	f(x)<0

Extremos: $f'(x)=0$

$f'(x)=\dfrac{4x-x^2}{(2-x)^2}$ $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0\rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}$

$(-1,-\frac{1}{2});(1,\frac{1}{2})$

Monotonía:

$x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
f'(x)<0 decreciente	f'(x)>0 creciente	f'(x)<0 decreciente

$(-1,-\frac{1}{2})$ es un mínimo

$\left(1,\frac{1}{2}\right)$ es un máximo

Puntos de inflexión: $f''(x)=0$

$$f''(x)=\frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3} \qquad \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{cases} \qquad (0,0);\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right);\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Curvatura:

$x<-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<0$	$0<x<\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
f"(x)<0 cóncava	f"(x)>0 convexa	f"(x)<0 cóncava	f"(x)>0 convexa