IES Delgado Brackenbury **Fecha:**

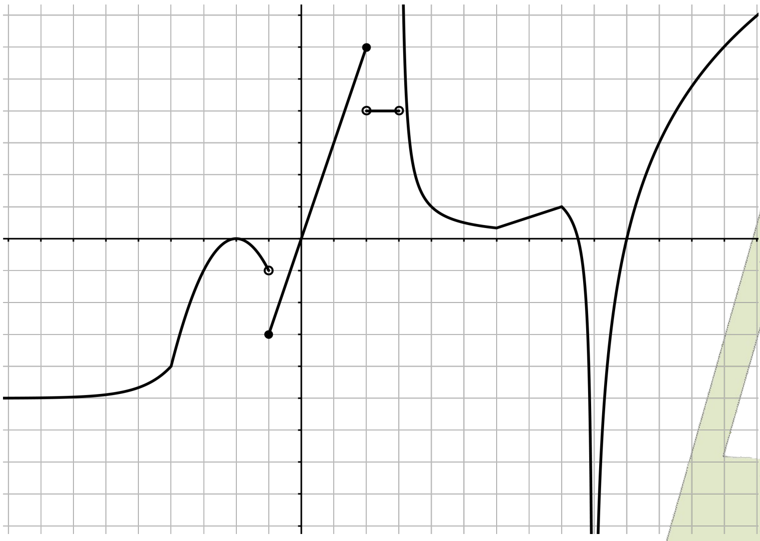
Nombre y Apellidos: **Grupo:**

Examen: Continuidad de funciones

NOTA: En este examen, al igual que todos los restantes del curso, hay que explicar los procedimientos usados en cada ejercicio. Un ejercicio con sólo el resultado final o un mal uso de la calculadora será puntuado con un 0. Todos los ejercicios deben ser simplificados al máximo.

Cualquier intervención inoportuna que impida algún derecho de otro alumno puede ser sancionada con 0,2 puntos en el examen.

1. Observa la siguiente gráfica y estudia la continuidad de la función:



La función es discontinua salvo en las siguientes puntos:

$x=-1$: presenta discontinuidad no evitable de salto finito (los límites laterales existen, pero toman valores diferentes).

$x=2$: Discontinuidad no evitable, de salto finito.

$x=3$: Discontinuidad no evitable de salto infinito (el límite por la derecha de x=3 es infinito).

$x=9$: Discontinuidad no evitable de salto infinito.

2. Dibuja la gráfica de una función que sea continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en x=-3, donde presenta una discontinuidad no evitable, y en x=3, donde presenta una discontinuidad evitable.

(respuesta libre)

3. Calcula el valor que debe tomar el parámetro ***m*** para que la función $f(x)=\begin{cases} mx-2, & x<1 \\ 4x-2m, & x\geq 1 \end{cases}$ sea continua.

Las dos partes de la función son continuas en los rangos en los que están definidas por se funciones polinómicas. Debemos estudiar la continuidad de f(x) en x=1.

$f(1)=4\cdot 1-2m=4-2m$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(mx-2)=m-2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(4x-2m)=4-2m$

$\Rightarrow m-2=4-2m \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow \mathbf{m=2}$

4. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{4-x}$

Esta es una función racional, por lo tanto es continua en todo su dominio ($Dom(f)=\mathbb{R}-\{4\}$)

Estudiamos el tipo de discontinuidad que presenta en x=4:

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{2x+1}{4-x}=\frac{9}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{2x+1}{4-x}=\frac{9}{0^-}=-\infty$$

Discontinuidad no evitable de salto infinito.

b) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+4}, & x\leq 0 \\ 2^x, & x>0 \end{cases}$

Las dos partes de la función son continuas en su dominio ($Dom(f)=[-4,+\infty)$)

Estudiamos la continuidad en x=0:

$$f(0)=\sqrt{0+4}=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x+4}=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2^x=1$$

Discontinuidad no evitable de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x+2}, & x<-2 \\ 3, & -2\leq x<-1 \\ \dfrac{3}{x+2}, & x>-1 \end{cases}$

Cada una de las partes de esta función es continua en su dominio. Los puntos conflictivos son $x=-2$ y $x=-1$.

Estudiamos $x=-2$:

$$f(-2)=3$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-} \frac{3}{x+2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+} 3=3$$

En $x=-2$ la función tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito.

Estudiamos $x=-1$:

$f(-1)\rightarrow$ No existe

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 3=3$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} \frac{3}{x+2}=3$$

En $x=-1$ la función tiene una discontinuidad evitable.

d) $f(x)=\begin{cases} 2^{x+5}-1, & x\le -3 \\ ax+9, & -3<x\le 5 \\ x^2+bx-11, & x>5 \end{cases}$

Las diferentes partes de esta función son todas continuas en $\mathbb{R}$.

Estudiamos $x=-3$ y $x=5$:

$f(-3)=3$

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-} 2^{x+5}-1=3$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} ax+9=-3a+9$

La función es continua en $x=-3$ si $3=-3a+9 \Rightarrow a=2$.

Si $a\ne 2 \Rightarrow$ La función es discontinua, con discontinuidad no evitable de salto finito.

$f(5)=5a+9$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} (ax+9)=5a+9$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} (x^2+bx-11)=14+5b$

La función es continua en $x=5$ si $5a+9=14+5b \Rightarrow 5a=5+5b \Rightarrow a=1+b$

Si $a\ne 1+b \Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad de salto finito.

Para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ debe ser $a=2$ y $a=1+b \Rightarrow b=1$.