Tema 2: Polinomios, ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Polinomios

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las variables están sometidas únicamente a las operaciones de producto y potencia de exponente natural.

El coeficiente de un monomio es el número que aparece multiplicando las variables.

La parte literal de un monomio está formada por las variables y sus exponentes.

El grado de un monomio es el número total de variables (la suma de los exponentes de las variables).

Dos monomios son semejantes si sus partes literales son iguales.

Un **polinomio** es una suma de monomios.

Los términos de un polinomio son cada uno de los monomios que lo forman.

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Los coeficientes de un polinomio son los coeficientes de los términos. El coeficiente principal de un polinomio es el coeficiente del término de mayor grado.

El término independiente de un polinomio es el término que no tiene parte literal.

Por ejemplo:

$$P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x - 7$$

Términos: $4x^4;\ -3x^3;\ 5x;\ -7$ *Coeficiente principal:* 4

Grado: 4 *Término independiente:* -7

Coeficientes: $4;\ -3;\ 5;\ -7$

Los polinomios pueden **sumarse**, **restarse**, **multiplicarse** y **dividirse**.

Para dividir un polinomio por un binomio (x – a) podemos hacer por el procedimiento de **Ruffini**:

a) Se colocan los coeficientes del dividendo en horizontal, y si falta alguno, se pone un cero.

b) Debajo y a la izquierda se coloca a, cambiada de signo.

c) Se baja directamente el primer término del dividendo.

d) El cociente es un polinomio de un grado menor que el dividendo.

e) El resto es el último número.

Por ejemplo:

Divide $P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x - 7$ entre $x - 3$

	4	-3	0	5	-7
3		12	27	78	249
	4	9	27	83	242

Cociente: $C(x) = 4x^3 + 9x^2 + 27x + 83$

Resto: $R = 242$

El **valor numérico de un polinomio** es el valor obtenido al sustituir la variable por un número.

Por ejemplo:

Halla el valor numérico de $P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x - 7$ para le valor $x = -2$.

$P(-2) = 4\cdot(-2)^4 - 3\cdot(-2)^3 + 5\cdot(-2) - 7 = 71$

La **raíces de un polinomio** son los valores para los que el valor numérico del polinomio es cero, $P(x) = 0$.

Por ejemplo:

Los valores $x = -1$, $x = 2$ y $x = 0$ son raíces del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 2\cdot(-1) = 0$

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 2\cdot 2 = 0$

$P(0) = 0^3 - 0^2 - 2\cdot 0 = 0$

Teorema del resto: El resto que se obtiene al dividir el polinomio P(x) entre el binomio (x – a) es el valor numérico del polinomio para x = a. **R = P(a)**.

Por ejemplo:

Halla el resto de la división de $P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x - 7$ entre $x - 3$.

$R = P(3) = 4\cdot(3)^4 - 3\cdot(3)^3 + 5\cdot(3) - 7 = 242$

Teorema del factor: El polinomio P(x) es divisible entre el binomio (x – a) si y sólo si x = a es una raíz del P(x).

Por ejemplo:

Halla el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^2 + kx + 5$ sea divisible entre el binomio $x + 2$.

Aplicando el teorema del factor, tiene que verificarse $P(-2) = 0$

$(-2)^2 + k\cdot(-2) + 5 = 0$

$4 - 2k + 5 = 0 \rightarrow -2k = 9 \rightarrow k = 9/2$

Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de factres irreducibles.

Para factorizar un polinomio:

a) Se hallan los divisores del término independiente.

b) Por el teorema del factor, se prueban los divisores obtenidos, comenzando por el más pequeño en valor absoluto.

c) Con el primero que haga cero el valor numérico se efectúa la división por Ruffini y se toma el cociente que se obtiene.

d) Se repite el proceso hasta que el cociente sea un polinomio de grado 2, en cuyo caso se aplica: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Por ejemplo:

Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

Div(30) = $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

	1	-4	-11	30
2		2	-4	-30
	1	-2	-15	0

$C(x) = x^2 - 2x - 15$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$ y nos da las otras dos raíces: $x_1=5$ *y*

$x_2 = -3$.

La descomposición factorial del polinomio es: P(x) = (x – 2)(x + 3)(x – 5).

Una **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos polinomios, $\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)}}$.

Para simplificar una fracción algebraica descomponemos el numerador y el denominador en factores irreducibles y eliminamos los factores iguales.

Por ejemplo:

Simplifica $\frac{x^3-4x^2-11x+30}{x^2-4}$

$$\frac{x^3-4x^2-11x+30}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+3)(x-5)}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x+3)(x-5)}{(x+2)}$$

Al igual que las fracciones numéricas, dos fracciones algebraicas son semejantes si los productos cruzados son iguales.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{S(x)} \Leftrightarrow P(x)\cdot S(x)=Q(x)\cdot R(x)$$

Las fracciones algebraicas se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Estas operaciones se llevan a cabo de la misma forma que se hace con las fracciones numéricas.

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad algebraica que es cierta sólo para algunos valores de las variables. Llamamos **soluciones** de la ecuación a los valores de las variables que hacen que la ecuación se verifique.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación de primer grado se eliminan los denominadores y los paréntesis, se trasponen los términos semejantes, se reducen y se despeja la incógnita.

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es aquella que se puede escribir de forma general como $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$. La forma general de resolver es sustituyendo los coeficientes en la siguiente expresión: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$.

Podemos encontrarnos con ecuaciones de segundo grado en las que alguno de los tres términos no aparece, en este caso decimos que tenemos una **ecuación de segundo grado incompleta**:

- Si b=0: $ax^2+c=0$

  Resolvemos despejando la incógnita: $\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

  Podemos encontrarnos con ecuaciones que no tengan solución debido a que el radicando resulte ser negativo.

- Si c=0: $ax^2+bx=0$

  Factorizamos el polinomio que resulta e igualamos a cero cada uno de los factores que resulta:

$$x(ax+b)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=-\frac{b}{a}\end{cases}$$

Número de soluciones: El discriminante de una ecuación de segundo grado es $\Delta = b^2 - 4ac$. Dependiendo del valor que tome, la ecuación tendrá dos soluciones, una o ninguna:

Si $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 soluciones

Si $\Delta = 0 \rightarrow$ 1 solución

Si $\Delta < 0 \rightarrow$ no tiene solución

Ecuaciones polinómicas de grado superior

Las ecuaciones polinómicas se pueden factorizar quedando de la forma: $(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot\ldots = 0$. Una vez expresada de esta forma las soluciones se obtienen igualando a 0 cada uno de los factores.

Cualquier ecuación polinómica se puede resolver factorizando la expresión.

La descomposición factorial de la ecuación de segundo grado es: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$, siendo x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación.

Para ecuaciones de mayor grado podemos factorizar recurriendo al método de Ruffini y sacando factor común.

Por ejemplo:

Resuelve la ecuación $x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

Comenzamos sacando factor común: $x(x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9) = 0$

Y factorizamos la expresión que queda entre paréntesis:

	1	*-6*	*10*	*-6*	*9*
3		*3*	*-9*	*3*	*-9*
	1	*-3*	*1*	*-3*	*0*

Así queda: $x(x - 3)(x^3 - 3x^2 + x - 3) = 0$

Segimos factorizando:

	1	*-3*	*1*	*-3*
3		*3*	*0*	*3*
	1	*0*	*1*	*0*

Quedando: $x(x-3)^2(x^2+1)=0$

Resolvemos: $x=0$

$x-3=0 \rightarrow x=3 (solución\, doble)$ $x^2+1=0$ *no tiene solución real.*

Ecuaciones bicuadradas: Son ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$. Estas ecuaciones se resuelven haciendo un cambio de variable: $t=x^2$, quedando: $at^2+bt+c=0$, convirtiéndose en una ecuación de segundo grado. Hay que recordar deshacer el cambio al final del proceso para obtener la solución de la ecuación inicialmente propuesta.

Ecuaciones racionales

Son aquellas ecuaciones que tienen incógnita en el denominador. Para resolver este tipo de ecuaciones deberemos obtener el mcm de los denominadores y multiplicar toda la ecuación por él. En la práctica, el nuevo denominador será el producto de todos los denominadores.

Por ejemplo:

Resuelve la ecuación $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{x-3}{x}=\frac{1}{2}$

2x(2x+1)+2(x+3)(x-3)=x(x+3)

Realizando las operaciones: $5x^2-x-18=0$ *(que ya sabemos resolver)*

Ecuaciones irracionales

Son aquellas ecuaciones en las que aparece la incógnita bajo el signo de la raíz.

La forma de proceder es la siguiente:

1. Se aísla un radical en uno de los miembros pasando el resto de los términos al otro miembro

2. Se eleva al cuadrado toda la expresión (los dos miembros). De esta forma se elimina la raíz que teníamos aislada.
3. Si aún queda alguna raíz se repite el proceso.
4. Se comprueban las soluciones obtenidas y se descartan aquellas que no sean validas.

Por ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación: $x+3\sqrt{x-2}=12$

$3\sqrt{x-2}=12-x$

$\rightarrow (3\sqrt{x-2})^2=(12-x)^2 \rightarrow 9(x-2)=144-24x+x^2$

$\rightarrow x^2-33x+162=0 \Rightarrow x_1=27\ ;\ x_2=6$

Comprobamos las dos soluciones obtenidas en la ecuación inicial:

$27+3\sqrt{27-2}=32\neq 12$
$6+3\sqrt{6-2}=12$

La solución de la ecuación es x=6.

Ecuaciones exponenciales

Son aquellas en la que la incógnita está en el exponente.

Nosotros nos vamos a encontrar de dos tipos:

1. Los dos miembros de la ecuación se pueden expresar como potencias de la misma base.

   Una vez que hayamos expresado los dos términos como una única potencia de la misma base igualaremos los exponentes.

   Por ejemplo:

   Resuelve la ecuación $2^{x+3}+2^x=36$

   $2^x\cdot 2^3+2^x=36 \rightarrow 2^x(8+1)=36 \rightarrow 2^x=\frac{36}{9} \rightarrow 2^x=2^2$

$\Rightarrow x=2$

2. Se puede reducir a una ecuación de segundo grado.

   Para resolver haremos un cambio de variable: $t=a^x$

   Por ejemplo:

   Resuelve la ecuación $9^x-3\cdot 3^x=-2$

   $3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0$

   Hacemos el cambio $t=3^x \rightarrow t^2-3t+2=0$

   resolvemos: $\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_2=1 \end{array}$

   y deshacemos el cambio: $\begin{array}{l} 2^x=2\Rightarrow x_1=1 \\ 2^x=1\Rightarrow x_2=0 \end{array}$

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un **conjunto** de ecuaciones con varias incógnitas.

Una solución del sistema es un conjunto de valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

Si **todas** las ecuaciones del sistema son lineales (grado 1), decimos que tenemos un **sistema lineal de ecuaciones**. Si al menos una de las ecuaciones es de grado superior, el sistema no es lineal.

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales utilizaremos los métodos de **sustitución** o de **igualación**.

Por ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=289 \\ x+y=23 \end{array}\right\}$

Despejamos una de las incógnitas en la segunda ecuación: y=23-x

sustituimos en la primera ecuación: $x^2+(23-x)^2=289 \rightarrow 2x^2-46x+240=0$

$$\rightarrow x=\frac{46\pm\sqrt{46^2-4\cdot 2\cdot 240}}{2\cdot 2}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=8 \\ x_2=15 \end{array}\right.$$

Si $x_1=8 \Rightarrow y=23-8=15$

Si $x_2=15 \Rightarrow y=23-15=8$

Por lo que las posibles soluciones son (8,15) y (15,8).

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con varias incógnitas.

En general, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ son los coeficientes

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ son los términos independientes

Las ecuaciones las denotamos por E_i (ecuación que ocupa el lugar i).

Una solución del sistema es un conjunto de valores para las incógnitas que al ser sustituidos en las ecuaciones las verifican **todas**. Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar **todas** las soluciones.

Sistemas de ecuaciones equivalentes

Dos **sistemas** son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**. Dos sistemas pueden ser equivalentes incluso aunque no tengan el mismo número de ecuaciones.

Podemos obtener sistemas equivalentes haciendo determinadas operaciones:

- Cambiando el orden de las ecuaciones.
- Multiplicando o dividiendo los dos miembros de una de las ecuaciones por un mismo número distinto de cero.
- Sustituyendo una de las ecuaciones por la suma de ella con una combinación lineal de las demás.
- Eliminando una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

Por ejemplo:

Sea el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+3y-2z=3 \\ x+y+z=2 \\ 2x+4y-z=5 \end{array}\right\}$

Obtenemos un sistema equivalente intercambiando la primera y la tercera ecuación:

$$E_1 \Leftrightarrow E_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y-z=5 \\ x+y+z=2 \\ x+3y-2z=3 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sistema equivalente multiplicando la segunda ecuación por 5:

$$E'_2=5E_2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=3 \\ 5x+5y+5z=10 \\ 2x+4y-z=5 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sistema equivalente sumando a la primera ecuación una combinación lineal de la segunda y la tercera:

$$E'_1=E_1+2E_2-3E_3 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x-7y+3z=-8 \\ x+y+z=2 \\ 2x+4y-z=5 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sistema equivalente eliminando la tercera ecuación ya que es una combinación lineal de las otras dos:

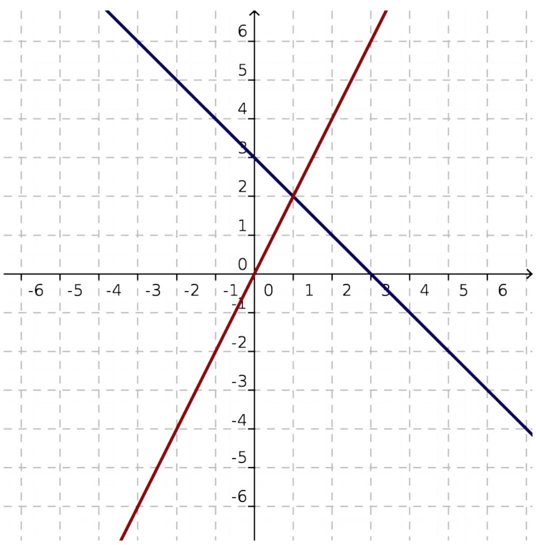
$$E_3=E_1+E_2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=3 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

Resolución gráfica de sistemas lineales con dos incógnitas.

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones se representan en los mismos ejes coordenados cada una de las rectas asociadas a las ecuaciones. El punto de corte de las rectas es la solución del sistema.

Por ejemplo:

Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$



El punto de corte de las dos rectas es (1,2) por lo que ésta es la solución: x=1, y=2.

Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones

Para resolver algebraicamente los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ya conoces los métodos de **sustitución**, **igualación** y **reducción**:

- **Método de sustitución**: consiste en despejar una de las incógnitas de una ecuación y sustituirla en la otra.
- **Método de igualación**: se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualen las expresiones obtenidas.
- **Método de reducción**: se suman o restan las ecuaciones de forma que una de las incógnitas se elimina tras esta operación.

En los tres métodos se obtiene una sola ecuación con una incógnita, se resuelve y después se halla el valor para la otra incógnita.

Para escoger el método de resolución más apropiado deberemos fijarnos en el sistema de ecuaciones:

➔ Si una de las incógnitas está despejada o es muy sencillo despejarla en una de las ecuaciones, usaremos el método de sustitución.

➔ Si una de las incógnitas está despejada en las dos ecuaciones, resolvemos por el método de igualación.

➔ Si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente (o el opuesto) en ambas ecuaciones, usaremos el método de reducción.

Por ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$

Si sumamos las dos ecuaciones: $3x=3 \Rightarrow x=1$

despejando de la segunda ecuación: $y=2x \Rightarrow y=2\cdot 1=1$

La solución del sistema es x=1, y=2.

Método de Gauss

Un **sistema escalonado** tiene la siguiente forma: $\left.\begin{array}{r} ax+by+cz=d \\ ey+fz=g \\ hz=j \end{array}\right\}$.

Este tipo de sistemas de ecuaciones es muy sencillo de resolver ya que se van despejando las incógnitas desde la última ecuación (en la que prácticamente está despejada) hasta la primera.

Por ejemplo:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=5 \\ y+3z=5 \\ 3z=6 \end{array}\right\}$

*Despejamos **z** de la tercera ecuación:*

$$z=\frac{6}{3}=2$$

*Sustituimos el valor de z en la segunda ecuación y despejamos **y**:*

$$y+3\cdot 2=5 \rightarrow y=5-6=-1$$

*Sustituimos los valores obtenidos en la primera ecuación y despejamos **x**:*

$$3x+2\cdot(-1)-2=5 \rightarrow x=\frac{5+2+2}{3}=3$$

El **método de Gauss** para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en aplicar reiteradamente el método de reducción al sistema de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones equivalente al inicial que sea escalonado.

Utilizaremos las transformaciones adecuadas para obtener otro sistema equivalente: cambio, multiplicación o división por un número, combinación lineal.

Por ejemplo:

Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x+y-3z=1 \\ x-2y+4z=19 \\ 3x+4y-z=1 \end{array}\right\}$

$$E_1 \Leftrightarrow E_2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+4z=19 \\ 2x+y-3z=1 \\ 3x+4y-z=1 \end{array}\right\}$$

$$E'_2=E_2-2E_1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+4z=19 \\ 5y-11z=-37 \\ 3x+4y-z=1 \end{array}\right\}$$

$$E'_3=E_3-3E_1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+4z=19 \\ 5y-11z=-37 \\ 10y-13z=-56 \end{array}\right\}$$

$$E'_3=E_3-2E_2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+4z=19 \\ 5y-11z=-37 \\ 9z=18 \end{array}\right\}$$

Despejamos z: $z=\frac{18}{9}=2$

Sustituimos en la segunda ecuación y despejamos y: $y=\frac{-37+11\cdot 2}{5}=-5$

sustituimos en la primera ecuación y despejamos x: $x=19-4\cdot 2+2\cdot 5=21$

Clasificación de sistemas de ecuaciones

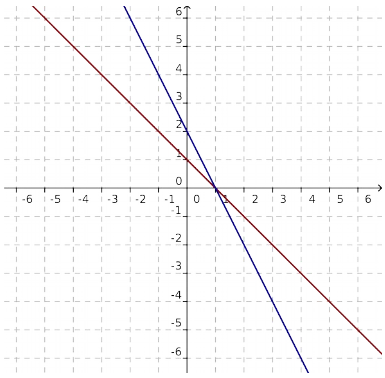
Los sistemas de ecuaciones se clasifican en función del número de soluciones que tiene:

Sistema compatible determinado: el sistema tiene una **única** solución.

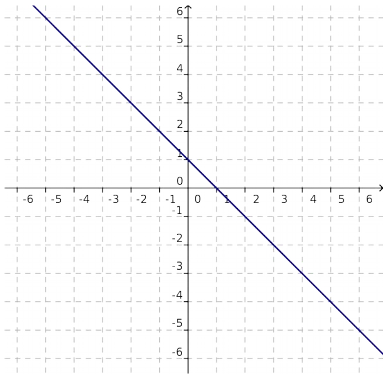
Sistema compatible indeterminado: tiene **infinitas** soluciones.

Sistema incompatible: **no** tiene solución.

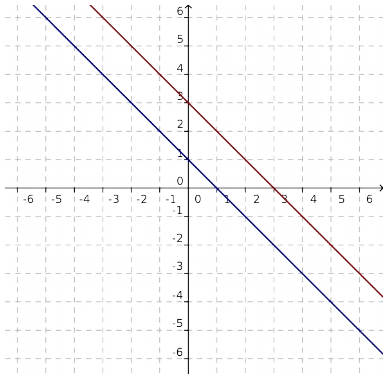
Cuando resolvemos gráficamente un sistema de ecuaciones tenemos las siguientes posibilidades:



Sistema compatible determinado



Sistema compatible indeterminado



Sistema incompatible

Cuando resolvemos por el método de Gauss un sistema de ecuaciones nos encontramos situaciones como las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=4\\ 2y-z&=5\\ 2z&=6 \end{aligned}\right\}$$

Sistema compatible determinado

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=4\\ 2y-z&=5\\ 0&=0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=4\\ 2y-z&=5\\ 2&=6 \end{aligned}\right\}$$

Sistema incompatible