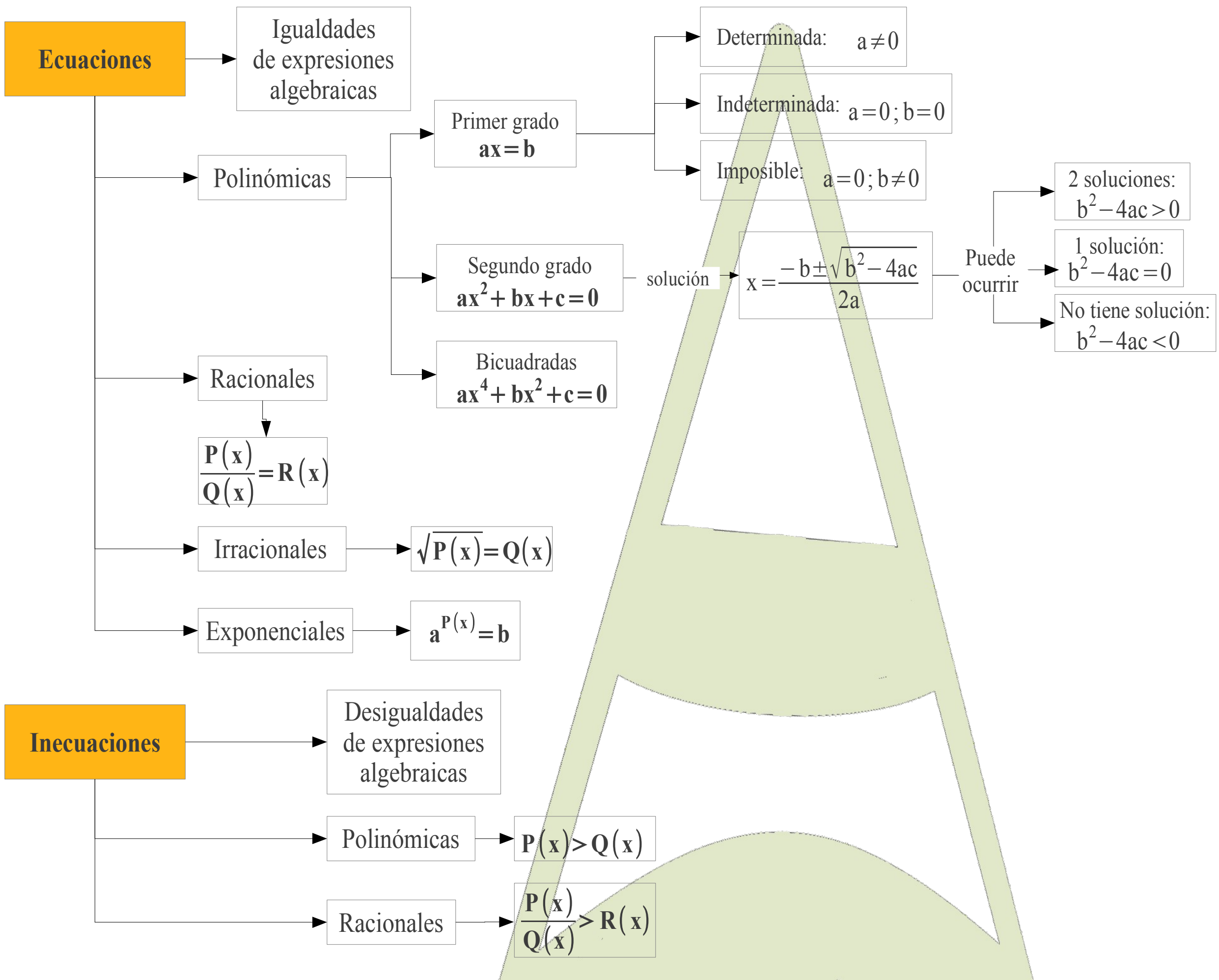
Profecelia.com

Tema 3: Ecuaciones



- Ecuaciones de primer grado
- Ecuaciones de segundo grado
- Ecuaciones polinómicas de grado superior
- Ecuaciones racionales
- Ecuaciones irracionales
- Ecuaciones exponenciales
- Inecuaciones polinómicas
- Inecuaciones racionales

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación de primer grado se eliminan los denominadores y los paréntesis, se trasponen los términos semejantes, se reducen y se despeja la incógnita.

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es aquella que se puede escribir de forma general como $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$. La forma general de resolver es sustituyendo los coeficientes en la siguiente expresión: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$.

Podemos encontrarnos con ecuaciones de segundo grado en las que alguno de los tres términos no aparece, en este caso decimos que tenemos una **ecuación de segundo grado incompleta**:

- Si b=0: $ax^2+c=0$

  Resolvemos despejando la incógnita: $\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

  Podemos encontrarnos con ecuaciones que no tengan solución debido a que el radicando resulte ser negativo.
- Si c=0: $ax^2+bx=0$

  Factorizamos el polinomio que resulta e igualamos a cero cada uno de los factores que resulta:

  $$x(ax+b)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-\frac{b}{a}\end{cases}$$

Número de soluciones: El discriminante de una ecuación de segundo grado es $\Delta=b^2-4ac$. Dependiendo del valor que tome, la ecuación tendrá dos soluciones, una o ninguna:

Si $\Delta>0\rightarrow$ 2 soluciones

Si $\Delta=0\rightarrow$ 1 solución

Si $\Delta<0\rightarrow$ no tiene solución

Ecuaciones polinómicas de grado superior

Las ecuaciones polinómicas se pueden factorizar quedando de la forma: $(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot...=0$. Una vez expresada de esta forma las soluciones se obtienen igualando a 0 cada uno de los factores.

Cualquier ecuación polinómica se puede resolver factorizando la expresión.

La descomposición factorial de la ecuación de segundo grado es: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$, siendo x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación.

Para ecuaciones de mayor grado podemos factorizar recurriendo al método de Ruffini y sacando factor común.

Por ejemplo:

Resuelve la ecuación $x^5-6x^4+10x^3-6x^2+9x=0$.

Comenzamos sacando factor común: $x(x^4-6x^3+10x^2-6x+9)=0$

Y factorizamos la expresión que queda entre paréntesis:

	1	*-6*	*10*	*-6*	*9*
3		*3*	*-9*	*3*	*-9*
	1	*-3*	*1*	*-3*	*0*

Así queda: $x(x-3)(x^3-3x^2+x-3)=0$

Segimos factorizando:

	1	*-3*	*1*	*-3*
3		*3*	*0*	*3*
	1	*0*	*1*	*0*

Quedando: $x(x-3)^2(x^2+1)=0$

Resolvemos: $x=0$ $\quad x^2+1=0$ *no tiene solución real.*
$x-3=0 \rightarrow x=3(\text{solución doble})$

Ecuaciones bicuadradas: Son ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$. Estas ecuaciones se resuelven haciendo un cambio de variable: $t=x^2$, quedando: $at^2+bt+c=0$, convirtiéndose en una ecuación de segundo grado. Hay que recordar deshacer el cambio al final del proceso para obtener la solución de la ecuación inicialmente propuesta.

Ecuaciones racionales

Son aquellas ecuaciones que tienen incógnita en el denominador. Para resolver este tipo de ecuaciones deberemos obtener el mcm de los denominadores y multiplicar toda la ecuación por él. En la práctica, el nuevo denominador será el producto de todos los denominadores.

Por ejemplo:

Resuelve la ecuación $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{x-3}{x}=\frac{1}{2}$

2x(2x+1)+2(x+3)(x-3)=x(x+3)

Realizando las operaciones: $5x^2-x-18=0$ *(que ya sabemos resolver)*

Ecuaciones irracionales

Son aquellas ecuaciones en las que aparece la incógnita bajo el signo de la raíz.

La forma de proceder es la siguiente:

1. Se aísla un radical en uno de los miembros pasando el resto de los términos al otro miembro
2. Se eleva al cuadrado toda la expresión (los dos miembros). De esta forma se elimina la raíz que teníamos aislada.
3. Si aún queda alguna raíz se repite el proceso.
4. Se comprueban las soluciones obtenidas y se descartan aquellas que no sean validas.

Por ejemplo:

Resuelve la siguiente ecuación: $x+3\sqrt{x-2}=12$

$3\sqrt{x-2}=12-x$

$\rightarrow(3\sqrt{x-2})^2=(12-x)^2\rightarrow 9(x-2)=144-24x+x^2$

$\rightarrow x^2-33x+162=0\Rightarrow x_1=27\ ;x_2=6$

Comprobamos las dos soluciones obtenidas en la ecuación inicial: $27+3\sqrt{27-2}=32\neq 12$
$6+3\sqrt{6-2}=12$

La solución de la ecuación es x=6.

Ecuaciones exponenciales

Son aquellas en la que la incógnita está en el exponente.

Nosotros nos vamos a encontrar de dos tipos:

1. Los dos miembros de la ecuación se pueden expresar como potencias de la misma base.

   Una vez que hayamos expresado los dos términos como una única potencia de la misma base igualaremos los exponentes.

   Por ejemplo:

   Resuelve la ecuación $2^{x+3}+2^x=36$

   $2^x \cdot 2^3+2^x=36 \rightarrow 2^x(8+1)=36 \rightarrow 2^x=\frac{36}{9} \rightarrow 2^x=2^2$

   $\Rightarrow x=2$

2. Se puede reducir a una ecuación de segundo grado.

   Para resolver haremos un cambio de variable: $t=a^x$

   Por ejemplo:

   Resuelve la ecuación $9^x-3 \cdot 3^x=-2$

   $3^{2x}-3 \cdot 3^x+2=0$

   Hacemos el cambio $t=3^x \rightarrow t^2-3t+2=0$

   resolvemos: $\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_2=1 \end{array}$

   y deshacemos el cambio: $\begin{array}{l} 2^x=2 \Rightarrow x_1=1 \\ 2^x=1 \Rightarrow x_2=0 \end{array}$

Inecuaciones polinómicas

Una inecuación polinómica es una expresión algebraica de la forma P(x)<0, siendo P(x) un polinomio. Podemos encontrarnos con diferentes desigualdades: $<, \leq, >, \geq$. La solución de una inecuación no es en general un valor, sino uno o varios intervalos que contienen los valores de la variable que verifican la desigualdad.

Para resolver las inecuaciones polinómicas podemos seguir los siguientes pasos:

1º: resolvemos la ecuación resultante de sustituir el signo de desigualdad por un igual.

2º: representamos las soluciones sobre la recta real.

3º: tomamos valores de los diferentes intervalos obtenidos en el paso 2º y comprobamos el signo que tiene la expresión.

4º: damos la solución en forma de intervalo.

Por ejemplo:

Resuelve la siguiente inecuación: $x^4-5x^2+4>0$

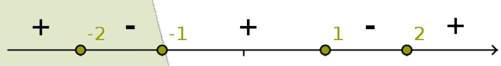
1º: resolvemos la ecuación: $x^4-5x^2+4=0 \rightarrow x_1=2\,;\,x_2=-2\,;\,x_3=1\,;\,x_4=-1$

2º: representamos las soluciones sobre la recta real:

3º: tomamos diferentes valores:

$-3\in(-\infty,-2) \;\rightarrow\; (-3)^4-5\cdot(-3)^2+4>0$

$-1.5\in(-2,-1) \;\rightarrow\; (-1.5)^4-5\cdot(-1.5)^2+4<0$



$0\in(-1,1) \;\rightarrow\; 0^4-5\cdot0^2+4>0$

$1.5\in(1,2) \;\rightarrow\; (1.5)^4-5\cdot(1.5)^2+4<0$

$3\in(2,+\infty) \;\rightarrow\; 3^4-5\cdot3^2+4>0$

4º: solución: $x\in(-\infty,.2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$

Inecuaciones racionales

Una inecuación racional es una expresión de la forma: {P(x)} over{Q(x)}, siendo P(x) y Q(x) polinomios. Al igual que en las inecuaciones polinómicas, podemos encontrarnos con diferentes desigualdades: $<,\leq,>,\geq$ y la solución se expresará mediante un intervalo.

Para resolver seguimos el siguiente procedimiento:

1º: hallamos las raíces del numerados y del denominador (resolvemos por separado tanto el numerados como el denominador)

2º: representamos las soluciones sobre la recta real.

3º: tomamos valores de los diferentes intervalos obtenidos en el paso 2º y comprobamos el signo que tiene la expresión inicial.

4º: damos la solución en forma de intervalo.

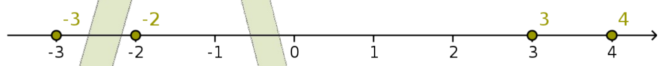
Por ejemplo:

Resuelve: $\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-8}<0$

1º: resolvemos las ecuaciones: $x^2-9=0 \rightarrow x_1=3\,;\, x_2=-3$

$x^2-2x-8=0 \rightarrow x_3=-2\,;\, x_4=4$

2º: representamos las soluciones sobre la recta real:

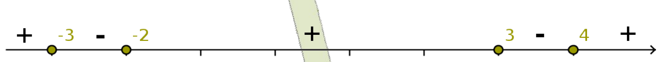


3º: tomamos diferentes valores:

$-4\in(-\infty,-3)\rightarrow\dfrac{(-4)^2-9}{(-4)^2-2\cdot(-4)-8}>0$

$-2.5\in(-3,-2)\rightarrow\dfrac{(-2.5)^2-9}{(-2.5)^2-2\cdot(-2.5)-8}<0$

$0\in(-2,3)\rightarrow\dfrac{0^2-9}{0^2-2\cdot 0-8}>0$



$3.5\in(3,4)\rightarrow\dfrac{3.5^2-9}{3.5^2-2\cdot 3.5-8}<0$

$5\in(4,\infty)\rightarrow\dfrac{5^2-9}{5^2-2\cdot 5-8}>0$

4º: solución: $x\in(-3,-2)\cup(3,4)$